L2 Mass – Théorie des jeux

Corrigé de l'interrogation du 27 novembre 2009

1a Aucune ligne n'est dominée par une autre ligne

1b La colonne 1 est dominée par la colonne 2

— 5 ——— 4

1c Après élimination des deux stratégies dominées de B on obtient le jeu $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La ligne 2 est maintenant dominée par la ligne 1

——3 —— 4

On obtient $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. La colonne 2 est dominée par les colonnes 1 et 3, d'où le jeu $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il n'y a plus de stratégie dominée.

1d Après inspection aucune position n'est un équilibre (par ex $(1,1)$ est regrettée par le joueur 1, etc.)
On peut aussi calculer $\underline{g} = -1 < \overline{g} = 1$ donc il n'y a pas d'équilibre.

1e Sachant que A joue la ligne 1, B minimise sa perte en jouant les colonnes 1 ou 2. Si A anticipe ce calcul de B, il a intérêt à changer son choix pour la ligne 4 qui lui donne un meilleur gain si B joue la colonne 1 ou la colonne 2. Si A joue la ligne 4, B regrettera de ne pas jouer la colonne 3.

Cette suite de raisonnements illustre le fait qu'il n'y a pas d'équilibre : l'un des joueurs regrettera forcément son choix. Egalement : les joueurs ont intérêt à cacher leur choix s'il n'y a pas d'équilibre (c'est ce qui se passe en stratégie mixte : la ligne effectivement jouée ou la colonne effectivement jouée est cachée) ; l'anticipation de la stratégie choisie par l'autre joueur dans un jeu sans équilibre est hasardeuse.

2 $g(x,y) = -4xy + 2x + 2y - 1$

2a On écrit $g(x,y) = (-4x+2)y + 2x - 1$. Pour x fixé, si $-4x+2 \leq 0$ alors $y \mapsto g(x,y)$ est décroissante donc $\inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y) = g(x,1) = -2x+1$.
Si $-4x+2 \geq 0$ alors $y \mapsto g(x,y)$ est croissante donc $\inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y) = g(x,0) = 2x-1$

Résumons : $x \mapsto \inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y)$ ~~est~~ vaut $2x-1$ sur $[0,\frac12]$ donc est strict^t croissante sur $[0,\frac12]$; elle vaut $-2x+1$ sur $[\frac12,1]$ donc est strict^t décroissante sur $[\frac12, 1]$. Son tableau de variation est donc

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & & \frac12 & & 1 \\ \hline \inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y) & & \nearrow & 0 & \searrow & \end{array}$$

Son sup est donc atteint en $x = \frac12$ et vaut 0.

2b. Le gain garanti optimal du joueur 1 est $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left(\inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y) \right) = 0$ d'après (a)
Les stratégies prudentes du joueur 1 sont les $x \in [0,1]$ tels que $\inf\limits_{y\in[0,1]} g(x,y)$ est maximal. D'après (a) $x = \frac12$ est la seule stratégie prudente du joueur 1

2c On regarde si $\underline{g} = \overline{g}$. Si oui les équilibres sont les couples de stratégies prudentes.

On détermine pour y fixé $\sup\limits_{x\in[0,1]} g(x,y) = \sup\limits_{x\in[0,1]} (-4y+2)x + 2y - 1 = +2y - 1$ si $-4y+2 \leq 0$ ie si $y \geq \frac12$
$= -2y+1$ si $y \leq \frac12$

On en déduit le tableau de variation

$$\begin{array}{c|ccccc} y & 0 & & \frac12 & & 1 \\ \hline \sup\limits_{x\in[0,1]} g(x,y) & & \searrow & 0 & \nearrow & \end{array}$$

donc l'inf est atteint en $y = \frac12$ et vaut 0

Conclusion $\overline{g} = 0$ et $y = \frac12$ est la seule stratégie prudente du joueur 2.
$\underline{g} = \overline{g}$ donc $(\frac12, \frac12)$ est un équilibre et c'est le seul

[Rq : on peut utiliser le théorème de Sion pour observer sans calcul que le jeu admet un équilibre, en particulier que $\overline{g} = \underline{g} = 0$

3 Extension mixte du jeu $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3a $G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(1,0)\right) = \frac{1}{3}\times 1\times(-1) + \frac{2}{3}\times 1\times 1 + 0 = \frac{1}{3}$

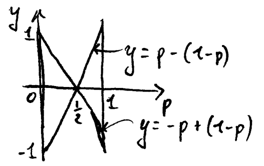
3b le plus mauvais gain est $\inf\limits_{q\in[0,1]} G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(q,1-q)\right) = \inf\limits_{q\in[0,1]} \frac{1}{3}q(-1) + \frac{2}{3}q + \frac{1}{3}(1-q) + \frac{2}{3}(1-q)(-1) = \inf\limits_{q\in[0,1]} \left(\frac{2}{3}q - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

[Rq : on peut aussi écrire $\inf\limits_{q\in[0,1]} G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(q,1-q)\right) = \min\left\{G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(1,0)\right), G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(0,1)\right)\right\}$ car $q \mapsto G\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),(q,1-q)\right)$ est affine

$= \min\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3}$

3c On cherche les $p\in[0,1]$ maximisant $\inf\limits_{q\in[0,1]} G((p,1-p),(q,1-q)) = \min\{G((p,1-p),(1,0)), G((p,1-p),(0,1))\} = \min\{-p+(1-p), p-(1-p)\}$

On trace les graphes des fonctions $p\mapsto -p+(1-p)$ et $p\mapsto p-(1-p)$: ce sont des segments de droites passant par les points $(0,1)$ et $(1,-1)$ pour le premier, $(0,-1)$ et $(1,1)$ pour le second



Les deux graphes s'intersectent en le point d'abscisse p_0 avec vérifiant $-p_0+(1-p_0) = p_0-(1-p_0)$ soit $p_0 = \frac{1}{2}$

D'après le dessin $\min\{p-(1-p), -p+(1-p)\}$ vaut $p-(1-p) = 2p-1$ pour $p\in[0,\frac{1}{2}]$, fct strict[t] croissante de p

$-p+(1-p) = -2p+1$ pour $p\in[\frac{1}{2},1]$, —— décroissante ——

donc le sup est atteint en $p=\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{2}) = 0$

Conclusion : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 1 et $\underline{G}$ vaut 0

3d On cherche $q\in[0,1]$ minimisant $\sup\limits_{p\in[0,1]} G((p,1-p),(q,1-q)) = \max\{G((1,0),(q,1-q)), G((0,1),(q,1-q))\} = \max\{-q+(1-q), q-(1-q)\}$

On a déjà tracé les graphes des fonctions $q\mapsto -q+(1-q)$ et $q\mapsto q-(1-q)$. Les graphes s'intersectent en $q=\frac{1}{2}$

$\max\{-q+(1-q), q-(1-q)\}$ vaut $-q+(1-q) = -2q+1$ pour $q\in[0,\frac{1}{2}]$, fct strict[t] décroissante de q

$q-(1-q) = 2q-1$ pour $q\in[\frac{1}{2},1]$, —— croissante de q

donc $q\mapsto \max\{-q+(1-q), q-(1-q)\}$ atteint son min en $q=\frac{1}{2}$ et ce min vaut 0

Conclusion : $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2

3e On a $\underline{G} = \overline{G} = 0$ donc les couples de stratégies (mixtes) prudentes sont les équilibres. D'après (c) et (d), $\left((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\right)$ est le seul équilibre de l'extension mixte du jeu

[Rq sur (d) et (e) : On peut aussi utiliser le résultat du cours affirmant que l'extension mixte d'un jeu matriciel admet un équilibre. On sait par (c) que $\underline{G} = 0$ donc $\overline{G} = 0$. On détermine les stratégies mixtes prudentes de J2 en résolvant $\begin{cases} -q+(1-q) \leqslant \overline{G} = 0 \\ q-(1-q) \leqslant \overline{G} = 0 \end{cases}$ (la ~~perte~~ majoration $\overline{G}$ de la perte moyenne est garantie en jouant une stratégie mixte prudente)

On obtient $2q \geqslant 1$ et $2q \leqslant 1$ donc $q = \frac{1}{2}$.

Rq L'extension mixte du jeu matriciel $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a pour fonction de paiement du 1er joueur $G((p,1-p),(q,1-q)) = -pq + (1-p)q + p(1-q) - (1-p)(1-q)$

$= -4pq + 2p + 2q - 1$

avec $p,q\in[0,1]$. On reconnaît le jeu de la question 2 dont on a déjà calculé les équilibres.

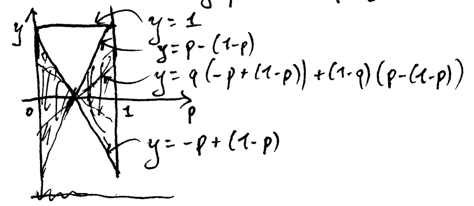
4 $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4a On cherche une stratégie mixte (q_1,q_2,q_3) de J2 dominant strictement $(0,1,0)$. On sait d'après le cours qu'on peut prendre $q_2 = 0$. Écrivons $q_1 = q$, $q_3 = 1-q$

on cherche $q\in[0,1]$ tel que $\forall p\in[0,1]$ $G((p,1-p),(q,0,1-q)) < G((p,1-p),(0,1,0))$ ce qui équivaut à $\begin{cases} -q+1-q < 1 & (p=1) \\ q-(1-q) < 1 & (p=0) \end{cases}$

Il suffit de prendre $q = \frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ domine strictement $(0,1,0)$

Rq On peut aussi tracer les graphes des fonctions $p \mapsto -p+(1-p)$ et $p \mapsto p-(1-p)$ cf (3c) qu'on compare au graphe de $p \mapsto p+(1-p)=1$ correspondant au gain moyen du joueur 1 si le joueur 2 joue $(0,1,0)$. Le graphe des fonctions $p \mapsto q(-p+(1-p)) + (1-q)(p-(1-p))$ décrit les segments "compris entre" le 1er et le 2ème graphe. Pour $q=\frac{1}{2}$ on obtient un segment horizontal strict^t en dessous du 3ème graphe



4b (q_1,q_2,q_3) stratégie mixte $\Leftrightarrow$ $q_1,q_2,q_3 \geq 0$ et $q_1+q_2+q_3=1$

Soit (α,β,γ) une stratégie mixte dominant strict^t $(0,1,0)$ ie $\forall p \in [0,1]$ $G((p,1-p),(\alpha,\beta,\gamma)) < G((p,1-p),(0,1,0))$

On forme $q_2(\alpha,\beta,\gamma) + (q_1,0,q_3) = (q_2\alpha+q_1, q_2\beta, q_2\gamma+q_3)$. C'est une stratégie mixte : $q_2\alpha+q_1 \geq 0$ puisque $q_2,\alpha,q_1 \geq 0$; de même $q_2\beta \geq 0$ et $q_2\gamma+q_3 \geq 0$

On a $q_2\alpha+q_1+q_2\beta+q_2\gamma+q_3 = q_2(\alpha+\beta+\gamma)+q_1+q_3 = q_2+q_1+q_3 = 1$

On observe que pour p fixé l'application $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(q_1,q_2,q_3) \mapsto G((p,1-p),(q_1,q_2,q_3))$ est linéaire, donc $G((p,1-p), q_2(\alpha,\beta,\gamma)+(q_1,0,q_3)) =$ $q_2 G((p,1-p),(\alpha,\beta,\gamma)) + G((p,1-p),(q_1,0,q_3))$

qu'on compare à $G((p,1-p),(q_1,q_2,q_3)) = q_2 G((p,1-p),(0,1,0)) + G((p,1-p),(q_1,0,q_3))$

Si $q_2>0$, on a $q_2 G((p,1-p),(\alpha,\beta,\gamma)) < q_2 G((p,1-p),(0,1,0))$, ceci pour tout $p \in [0,1]$ puisque (α,β,γ) domine strict^t $(0,1,0)$. On en déduit que $G((p,1-p), q_2(\alpha,\beta,\gamma)+(q_1,0,q_3)) < G((p,1-p),(q_1,q_2,q_3))$ pour tout $p\in[0,1]$ donc $q_2(\alpha,\beta,\gamma)+(q_1,0,q_3)$ domine strict^t (q_1,q_2,q_3)

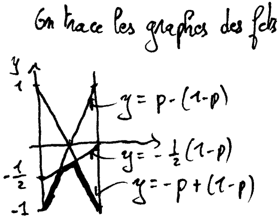
4c D'après le cours les équilibres du jeu sont inchangés lorsqu'on supprime les stratégies strict^t dominées. Ce sont donc les équilibres du jeu $((p,1-p),(q,0,1-q)) \mapsto G((p,1-p),(q,0,1-q))$. On reconnaît l'extension mixte du jeu de la question 3 donc $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}))$ est le seul équilibre.

5 On sait que les équilibres de l'extension mixte du jeu matriciel obtenu par élimination des stratégies dominées au sens large sont des équilibres de l'extension mixte du jeu initial (avec une réindexation convenable). On a obtenu en 3 l'équilibre $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ pour l'extension mixte du jeu $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Celui-ci correspond au jeu initial après élimination des lignes 2, 3 et des colonnes 1, 3, 5. On en déduit que $((\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}),(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0))$ est un équilibre de l'extension mixte du jeu initial (mais il y en a peut être d'autres).

Le choix d'une stratégie mixte prudente de la part de A est prévisible par B puisqu'elle est optimale si B joue également prudemment. A n'a aucun intérêt à cacher son choix.

6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ Les stratégies mixtes prudentes de A sont les $p_0 \in [0,1]$ maximisant $p \mapsto \min\{-p+1-p,\ p-(1-p),\ -\frac{1}{2}(1-p)\}$

On trace les graphes des fcts $p \mapsto -p+(1-p)$, $p-(1-p)$, $-\frac{1}{2}(1-p)$ (ce sont des segments de droites). On en déduit le graphe de la fct $p \mapsto \min\{\text{—}\}$



D'après le dessin le max est atteint en le p tq $-p+(1-p) = -\frac{1}{2}(1-p)$ soit $p=\frac{3}{5}$ et il vaut $-\frac{1}{2}(1-\frac{3}{5}) = -\frac{1}{5} = \underline{G}$