L2 Mass - Option Théorie des jeux     Corrigé de l'interrogation du 16 octobre 2009

1a) Les stratégies du joueur 1 sont les lignes ; il a cinq stratégies. Celles du joueur 2 sont les colonnes. Il en a sept.

Si la ligne 2 colonne 4 est jouée le gain du joueur 1 est $-3$. Le gain du joueur 2 est donc 3.

1b) La ligne 2 est dominée par la ligne 4. Il n'y a pas d'autre stratégie dominée pour le joueur 1.

Les colonnes 5 et 7 sont dominées par la colonne 3. Il n'y a pas d'autre strat. dominée pour le joueur 2.

1c) A la première étape on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Pour ce nouveau jeu les lignes 2 et 4 sont dominées par la ligne 3. Les colonnes 1 et 5 sont dominées par la colonne 2. On obtient $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La colonne 3 est maintenant dominée par la colonne 1 d'où le nouveau jeu $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il n'y a plus de stratégie dominée.

1d) Par inspection : chaque couple de stratégie est regretée par l'un des joueurs donc il n'y a pas d'équilibre.

On peut aussi calculer $\underline{g} = 0$, $\overline{g} = 1$. $\underline{g} < \overline{g}$ donc il n'y a pas d'équilibre.

2) Cf le corrigé de l'exercice 1 de l'interrogation d'octobre 2008.

a) Pour $a=0$ on a $\underline{g} = \max(\min(0,-1,1), \min(1,2,0)) = \max(-1,0) = 0$. La ligne 2 donne comme plus mauvais paiement $\underline{g}$ donc est prudente pour le joueur 1

$\overline{g} = \min(\max(0,1), \max(-1,2), \max(1,0)) = \min(1,2,1) = 1$. La colonne 3 donne comme plus mauvaise perte $1 = \overline{g}$ donc est prudente pour le joueur 2.

2b) Pour a quelconque on a $\underline{g} = \max(\min(a,-1,1), \min(1,2,a)) = \max(\min(a,-1), \min(1,a)) = \min(1,a)$

car $\min(1,a) \geqslant \min(-1,a)$

$\overline{g} = \min(\max(a,1), \max(-1,2), \max(1,a)) = \min(\max(a,1),2)$

2c) Puisqu'il y a toujours des couples de stratégies prudentes, il y a un équilibre si et seulement si $\underline{g} = \overline{g}$ donc si $\min(1,a) = \min(\max(a,1),2)$

On calcule les expressions de $\underline{g}$ et $\overline{g}$ dans un tableau :

| $a$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\min(1,a)$ | | $a$ | | $1$ | | $1$ | |
| $\max(a,1)$ | | $1$ | | $a$ | | $a$ | |
| $\min(\max(a,1),2)$ | | $1$ | | $a$ | | $2$ | |
| $\underline{g} = \overline{g}$ | | non | oui | non | | Non | |

Il y a un équilibre si et seulement si $a=1$

2d) On cherche les stratégies prudentes pour $a = 1$. Pour le joueur 1 la ligne 2 est la seule à garantir un paiement d'au moins 1 donc la seule prudente. Pour le joueur 2 les colonnes 1 et 3 sont les seules à garantir une perte d'au plus 1 donc les seules prudentes.

Les équilibres sont donnés par les couples de stratégies prudentes $(2,1)$ et $(2,3)$

3a) $g(x_0,y_0) > \underline{g}$ donc le joueur 1 reçoit plus que ce qui lui était garanti donc le joueur 2 regrette son choix

3b) $g(x_0,y_0) > \overline{g}$ donc le joueur 2 perd plus que ce qui lui est garanti donc il regrette son choix. 3a s'applique également puisque $\overline{g} \geq \underline{g}$