L2 MASS - option Théorie des jeux **Interrogation 2** **21 novembre 2008**

Durée prévue : deux heures

Justifier correctement chaque réponse.

1. *Equilibres en stratégies pures. La dernière question peut être traitée avant si besoin est.*

On considère le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2 & a & 3 \\ a & 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

a. De combien de stratégies disposent les joueurs 1 et 2 ? quels sont les gains du joueur 1 et du joueur 2 si le joueur 1 joue sa stratégie 1 et si le joueur 2 joue sa stratégie 2 ?

b. On fixe $a = \frac{3}{4}$. Quelles sont les stratégies dominées de chaque joeur ?

Quelle est la meilleure réponse du joueur 2 (*i.e.* son meilleur choix de stratégie) à la stratégie 1 du joueur 1 ? Quelle est sa meilleur réponse à la stratégie 2 du joueur 1 ?

Le jeu admet-il un équilibre ? Si oui quels sont les équilibres du jeu ?

c. On fixe $a = 0$. Mêmes questions que précédemment.

d. Pour quelles valeurs de a le joueur 1 a t-il une stratégie dominée ? une stratégie dominante ?

Peut on conclure sans calcul que le jeu admet un équilibre lorsque le joueur 1 a une stratégie dominée ? Quel serait l'équilibre ?

e. Quel est, en fonction de a, le gain garanti du joueur 1 s'il joue sa stratégie 2 ?

Quel est (en fonction de a) le gain garanti optimal du joueur 1 ?

Pour quelles valeurs de a le jeu admet-il au moins un équilibre ? (Expliquez votre démarche.)

Quels sont (en fonction de a) les équilibres du jeu lorsque le jeu admet un équilibre ?

f. Quelles sont, en fonction de a, les stratégies dominées du joueur 2 ? les stratégies dominantes du joueur 2 ?

2. *Ensemble continu de stratégie*

On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant :

$$X = Y = [0,1],\ g(x,y) = -\frac{11}{4}xy + \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} \ .$$

a. Calculer $\inf\limits_{y\in Y} g(x,y)$ en fonction de x puis $\sup\limits_{x\in X}\left(\inf\limits_{y\in Y} g(x,y)\right)$.

b. Déterminer les stratégies prudentes du joueur 1 puis celles du joueur 2.

c. Le jeu admet il un équilibre ?

3. *Equilibres en stratégies mixtes*

On considère le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

a. Quelle est l'espérance de gain du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et si le joueur 2 joue la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

b. Quels sont les réels $q \in [0,1]$ tels que la stratégie mixte $(q, 1-q)$ du joueur 2 soit une meilleure réponse à la stratégie mixte $(1,0)$ du joueur 1 ?

A quoi cela correspond t-il en terme de stratégie pure ?

c. Quels sont les réels $q \in [0,1]$ tels que la stratégie mixte $(q, 1-q)$ du joueur 2 soit une meilleure réponse à la stratégie mixte $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ du joueur 1 ?

Pour chacun du ou des q obtenus, le couple de stratégies mixtes $((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), (q, 1-q))$ est il un équilibre ?

d. Quelle est l'espérance de gain garantie du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(p, 1-p)$? Quelle est son espérance de gain garantie optimale ? En déduire la valeur de l'extension mixte du jeu (expliquez).

e. Pourquoi l'adjectif "garantie" de "espérance de gain garantie" est il au féminin plutot qu'au masculin ?

f. Quels sont les stratégies mixtes du joueur 2 lui garantissant une perte au plus égale à la valeur de l'extension mixte du jeu trouvée plus haut ?

Quels sont les équilibres de l'extension mixte du jeu ?

g. Quels sont les équilibres de l'extension mixte du jeu de matrice de paiement suivant ? (Justifiez.)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{4} & 3 \\ \frac{3}{4} & 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$