L2 Math - option Théorie des jeux   Un corrigé de l'interrogation du 21 novembre 2008

1a nbre de stratégies : 2 et 4 respectivement.   gain des joueurs : 2 et -2 respectivement.

1b $\begin{pmatrix} 9/16 & 2 & 3/4 & 3 \\ 3/4 & 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$ Les stratégies 2 et 3 du joueur 2 sont dominées par la stratégie 1.
Aucune stratégie du joueur 1 n'est dominée.

Meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie 1 du joueur 1 : strat. 1 car $\frac{9}{16} < 2, \frac{3}{4}, 3$
—————————— 2 —— : strat. 4 car $1/2 < 3/4, 1, 2$

Seuls candidats pour un équilibre : $(1,1)$ et $(2,4)$ (la strat. du joueur 2 à l'équilibre doit être une meilleure réponse à la strat. du joueur 1)
$(1,1)$ n'est pas un équilibre : le joueur 1 regrette son choix
$(2,4)$ ———— : ————
Donc il n'y a pas d'équilibre.

On peut aussi calculer $\underline{g} = \frac{9}{16}$ et $\bar{g} = \frac{3}{4}$. $\underline{g} < \bar{g}$ donc pas d'équilibre.

1c $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$ Les stratégies 2, 3, 4 du joueur 2 sont dominées par la stratégie 1, ie la strat. 1 est dominante.
Aucune stratégie du joueur 1 n'est dominée.

Meilleure réponse du joueur 2 à la strat. 1 du joueur 1 : strat. 1 ou 3
—— 2 —— : strat. 1

Candidats pour équilibre : $(1,1), (1,3), (2,1)$. $(1,1)$ et $(2,1)$ sont des équilibres.

Autre méthode : $\underline{g} = 0 = \bar{g}$ donc les couples de stratégies prudentes sont des équilibres. 1 et 2 sont des strat. prudentes du joueur 1 ; 1 est la seule strat. prudente du joueur 2 ⇝ $(1,1)$ et $(2,1)$ équilibres.

1d. La stratégie 1 du joueur 1 ne peut être dominée à cause des colonnes 2 et 4. Elle est dominante (ce qui équivaut à : la stratégie 2 est dominée) ssi $a^2 \geq a$ et $a \geq 2$, c'est à dire ssi $a \geq 2$.
Lorsque la stratégie 2 est dominée, la stratégie 1 est dominante et alors la meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie 1 donne un équilibre : le joueur 1 ne regrette pas le choix d'une stratégie dominante ; le joueur 2 ne regrette pas sa meilleure réponse par définition d'une meilleure réponse.
Pour $a \geq 2$ la strat. 2 est ~~la~~ une meilleure réponse du joueur 2 à la stratégie 1 du joueur 1 (c'est la seule si $a > 2$) ⇝ $(1,2)$ est un équilibre.

1e. Gain garanti du joueur 1 s'il joue la stratégie 2 : $\min(a, 1, 2, \frac{1}{2}) = \min(a, \frac{1}{2}) = a$ si $a \leq \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2}$ sinon

Gain garanti optimal du joueur 1 : $\underline{g} = \max\left(\min(a^2, 2, a, 3), \min(a, 1, 2, \frac{1}{2})\right) = \max\left(\min(a^2, a, 2), \min(a, \frac{1}{2})\right)$

Tableau de valeurs :

a	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$\min(a, \frac{1}{2})$	a	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\min(a^2, a, 2)$	a	a^2	a^2	a^2	a	2
$\underline{g} = \max(\ ,\ )$	a	a	$\frac{1}{2}$	a^2	a	2

Le jeu admet au moins un équilibre ssi $\underline{g} = \bar{g}$

On calcule $\bar{g} = \min\left(\max(a,a^2), \max(2,1), \max(a,2), \max(3,\frac{1}{2})\right) = \min\left(\max(a,a^2), 2, \max(a,2)\right) = \min(\max(a,a^2),2)$ car $\max(a,2) \geq 2$.

Tableau de valeurs pour $\bar{g}$:

a	$-\infty$ à $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ à 0	0 à 1	1 à $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ à $+\infty$
$\max(a,a^2)$	a^2	a^2	a	a^2	a^2
$\bar{g} = \min(\ ,2)$	2	a^2	a	a^2	2

Tableau de valeurs pour $\underline{g}$ et $\bar{g}$:

a	$-\infty$ à $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ à 0	0 à $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ à $\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ à 1	1 à $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ à 2	2 à $+\infty$
$\underline{g}$	a	a	a	$\frac{1}{2}$	a^2	a	a	2
$\bar{g}$	2	a^2	a	a	a	a^2	2	2
$\underline{g}=\bar{g}$	F	F	V	F	F (V en 1)	F	F	V

Le jeu admet donc au moins un équilibre ssi $a \in [0,\frac{1}{2}]$ ou $a=1$ ou $a \geq 2$

Les stratégies prudentes du joueur 1 pour les a tels qu'il y a un équilibre sont : 1 et 2 si $a=0$
2 si $a \in]0,\frac{1}{2}]$
1 si $a=1$ ou $a \geq 2$

Les stratégies prudentes du joueur 2 sont 1 si $a \in [0,\frac{1}{2}]$ ou $a=1$
2 et 3 si $a=2$
2 si $a>2$

Les équilibres lorsque $\underline{g}=\bar{g}$ sont les couples de stratégies prudentes : $(1,1)$ et $(2,1)$ si $a=0$
$(2,1)$ si $a \in]0,\frac{1}{2}]$
$(1,1)$ si $a=1$
$(1,2)$ et $(1,3)$ si $a=2$
$(1,2)$ si $a>2$

1f : Trop fastidieux

2a. x fixé $g(x,y) = \left(-\frac{11}{4}x+\frac{1}{4}\right)y + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$ fonction croissante de y si $-\frac{11}{4}x+\frac{1}{4} \geq 0$ auquel cas $\inf_y g(x,y) = g(x,0) = \frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$
décroissante de y si $-\frac{11}{4}x+\frac{1}{4} \leq 0$ auquel cas $\inf_y g(x,y) = g(x,1) = -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

$-\frac{11}{4}x+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{11}$. Sur $[0,\frac{1}{11}]$ $\inf_y g(x,y) = \frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$ fonction strict^t croissante de x

Sur $[1/11, 1]$ $\inf_y g(x,y) = -\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$ fonction strict^t décroissante de x

Donc $x \mapsto \inf_y g(x,y)$ atteint son maximum en $x=\frac{1}{11}$ uniquement et vaut en ce point $\frac{8}{11}$.

2b. D'après ce qui précède $\inf_y g(x,y) = \underline{g}$ ssi $x=\frac{1}{11}$ donc $x=\frac{1}{11}$ est la seule stratégie prudente du joueur 1

On détermine les stratégies prudentes du joueur 2 en calculant $\sup_x g(x,y) = \sup_x \left(\left(-\frac{11}{4}y+\frac{5}{2}\right)x + \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$ si $-\frac{11}{4}y+\frac{5}{2} \leq 0$ ie si $y \geq \frac{10}{11}$
$= -\frac{10}{4}y+3$ si $-\frac{11}{4}y+\frac{5}{2} \geq 0$ ie si $y \leq \frac{10}{11}$

Sur $[0,\frac{10}{11}]$ $\sup_x g(x,y) = -\frac{10}{4}y+3$ fonction strict^t décroissante de y

Sur $[\frac{10}{11},1]$ $\sup_x g(x,y) = \frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$ fonction strict^t croissante de y

Donc $\bar{g} = \inf_y(\sup_x g(x,y))$ est atteint en $y=\frac{10}{11}$ et vaut $\frac{8}{11}$

Donc $y=\frac{10}{11}$ est la seule stratégie prudente du joueur 2

2c. Comme $\underline{g} = \bar{g}$ les équilibres sont les couples de stratégies prudentes. $\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}\right)$ est le seul équilibre.

3a. $G\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}(1+6+3+2) = 1$

3b. On cherche $q \in [0,1]$ minimisant l'espérance de perte du joueur 2 si le joueur 1 joue la stratégie mixte $(1,0)$.
Cette espérance vaut $\frac{1}{2}q + 3(1-q) = -\frac{5}{2}q + 3$ minimal si $q = 1$. La meilleure réponse est donc $(1,0)$. Cette stratégie mixte correspond à la stratégie pure 1, de même que la stratégie mixte $(1,0)$ du joueur 1 correspond à sa stratégie pure 1.
Rq : On trouve toujours une stratégie pure parmi les meilleures réponses à une stratégie mixte donnée.

3c. On cherche q minimisant l'espérance de perte $G\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (q, 1-q)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}q + 3\frac{1}{3}(1-q) + \frac{3}{4}\frac{2}{3}q + \frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-q)$

$= \frac{1}{6}(1-6+3-2)q + 1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}q + \frac{4}{3}$ fonction décroissante de q.

$\rightsquigarrow q = 1$ ce qui correspond à la stratégie pure 1.
Le couple $\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), (1,0)\right)$ n'est pas un équilibre, sachant que le joueur 2 joue sa stratégie 1, le joueur 1 regrette de ne pas jouer sa stratégie pure 2.

3d. Espérance de gain garantie du joueur 1 s'il joue la stratégie mixte $(p, 1-p)$: $\min_{q \in [0,1]} G((p,1-p),(q,1-q)) = \min\left(G((p,1-p),(1,0)), G((p,1-p),(0,1))\right)$

$= \min\left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(1-p), 3p + \frac{1}{2}(1-p)\right)$

égalité si $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 3 + \frac{1}{2}\right)p = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$ donc si $p = \frac{1}{11}$.

Si $p \in [0, \frac{1}{11}]$, $\min\left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(1-p), 3p + \frac{1}{2}(1-p)\right) = 3p + \frac{1}{2}(1-p)$ (il suffit de comparer les deux termes en $p = 0$)
Si $p \in [1/11, 1]$, $\qquad = \frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(1-p)$

Espérance de gain garantie optimale du joueur 1 : $\max_{p \in [0,1]}\left(\min\left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(1-p), 3p + \frac{1}{2}(1-p)\right)\right)$. Or $p \mapsto \min\left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}(1-p), 3p + \frac{1}{2}(1-p)\right)$ est strict^t croissante sur $[0, \frac{1}{11}]$ et strict^t décroissante sur $[\frac{1}{11}, 1]$ d'après ce qui précède donc le max est atteint en $p = \frac{1}{11}$ et vaut $\frac{8}{11}$.
On sait que l'extension mixte du jeu admet une valeur, i.e. que $\underline{G} = \overline{G}$. On vient de calculer $\underline{G} = \frac{8}{11}$.

3e Une stratégie mixte ne garantit pas un gain mais seulement son espérance : si le joueur 2 joue sa stratégie 1 (pure) alors avec proba $\frac{1}{11}$ le gain du joueur 1 est $\frac{1}{2} < \underline{G}$.

3f. On cherche les $q \in [0,1]$ tq $\max\left(\frac{1}{2}q + 3(1-q), \frac{3}{4}q + \frac{1}{2}(1-q)\right) \leq \overline{G} = \frac{8}{11}$. Donc $\begin{cases} -\frac{5}{2}q + 3 \leq \frac{8}{11} \\ \frac{1}{4}q + \frac{1}{2} \leq \frac{8}{11} \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} q \geq \frac{10}{11} \\ q \leq \frac{10}{11} \end{cases}$

Seule solution : $q = \frac{10}{11}$. $\left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11}\right)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.
Equilibres = couples de stratégies prudentes. $\left(\left(\frac{1}{11}, \frac{10}{11}\right), \left(\frac{10}{11}, \frac{1}{11}\right)\right)$ est le seul équilibre

3g Les stratégies 2 et 3 du joueur 2 sont strict^t dominées par sa stratégie 1 donc les équilibres de l'extension mixte du jeu correspondent à ceux de l'extension mixte du jeu $\begin{pmatrix} 1/2 & 3 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. On obtient avec la question précédente le seul équilibre $\left((1/11, 10/11), (10/11, 0, 0, 1/11)\right)$.