L2 MASS - Option Théorie des jeux   Corrigé de l'interrogation du 24 octobre 2008

1)a) La première ligne donne le plus mauvais paiement 0, la seconde 1 donc la seconde réalise le max sur les lignes du plus mauvais paiement donc est prudente.

La première colonne donne comme plus grande perte 2, la deuxième 3, la troisième 2 donc la première (comme la troisième) réalise le min sur les colonnes de la plus grande perte donc est prudente.

Ce n'est pas un équilibre : le joueur 1 regrette de ne pas jouer la ligne 1 sachant que le joueur 2 joue la colonne 1.

1b) On calcule $\underline{g} = \max(\min(0,a), \min(2,a)) = \min(2,a)$

$$\bar{g} = \min(\max(2,a), 3, \max(2,a)) = \min(\max(2,a), 3)$$

Un jeu matriciel admet un équilibre si et seulement si $\underline{g} = \bar{g}$

On a $\underline{g} = \bar{g} \Leftrightarrow \underbrace{\min(2,a)}_{\leq 2} = \underbrace{\min(\max(2,a),3)}_{\geq 2}$

$\Leftrightarrow \min(2,a) = 2$ et $\max(2,a) = 2$

$\Leftrightarrow a \geq 2$ et $a \leq 2$

$\Leftrightarrow a = 2$

Pour $a = 2$ le jeu est de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 2 ~~est~~ [illegible] ($\Leftrightarrow$ ligne 2) est la seule stratégie prudente du joueur 1.

1 et 3 (colonne 1 et colonne 3) sont les stratégies prudentes du joueur 2, donc les équilibres sont $(2,1)$ et $(2,3)$.

2) $g(x,y) = x^2 - xy - 1$ est décroissante en y quelque soit $x \in [0,1]$ donc $y = 1$ est une stratégie dominante du joueur 2. (Elle n'est pas strictement dominante : $g(0,y)$ ne dépend pas de y.

Le joueur 2 ne regrettera pas le choix $y = 1$. Si le joueur 2 joue 1 le joueur 1 a intérêt à jouer x maximisant $g(x,1)$.

$g(x,1) = x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ est maximal si $x = 0$ ou $x = 1$, donc $x = 0$ ou $x = 1$ ne seront pas regrettés par le joueur 1 si le joueur 2 joue $y = 1$. Conclusion : $(0,1)$ et $(1,1)$ sont des équilibres.

3) Les colonnes 5 et 7 sont dominées par la colonne 3. La ligne 2 est dominée par la ligne 4. Après élimination des stratégies dominées, on obtient la matrice de paiement $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ Maintenant les colonnes 1 et 5 sont dominées par la colonne 2, les lignes 2 et 4 sont dominées par la ligne 3. On obtient après élimination de ces stratégies $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La colonne 3 est dominée par la colonne 1 $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Il n'y a plus de stratégie dominée.

4) $\inf_{y \in Y} g(x_0, y) \leq \sup_{x \in X} (\inf_{y \in Y} g(x,y))$

Si $g(x_0, y_0) > \sup_x (\inf_y g(x,y))$ alors $g(x_0,y_0) > \inf_y g(x_0,y)$ donc il existe $y \in Y$, $g(x_0,y) < g(x_0,y_0)$ donc le joueur 2 regrette son choix.

Si $g(x_0,y_0) < \sup_x (\inf_y g(x,y))$ alors $\exists x \in X$, $g(x_0,y_0) < \inf_y g(x,y)$. Or $\inf_y g(x,y) \leq g(x,y_0)$ donc $g(x_0,y_0) < g(x,y_0)$ donc le joueur 1 regrette son choix.