

On reconnaît 2 fois la matrice de paiement traitée en exemple dans la section précédente. Le jeu admet donc les mêmes équilibres (pourquoi ?) : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 1 et $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

En interprétant les stratégies mixtes prudentes trouvées en terme de stratégies mixtes du jeu initial on obtient : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ est une stratégie mixte prudente du joueur 1 et $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est une stratégie mixte prudente du joueur 2. On en déduit la valeur de l'extension mixte du jeu

$$\underline{G} = \bar{G} = G\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)\right) = \frac{10}{3}.$$

Les stratégies mixtes prudentes obtenues après élimination des stratégies dominées ne sont peut-être pas les seules. Nous cherchons maintenant celles que nous avons peut-être manquées.

Pour le joueur 2 les stratégies 3 et 4 ne sont pas des bonnes réponses à la stratégie mixte prudente $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 puisqu'elles donnent comme espérance de perte $5 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3} > \bar{G} = \frac{10}{3}$ et $8 \cdot \frac{2}{3} > \bar{G}$ respectivement. On en déduit que si (q_1, q_2, q_3, q_4) est une stratégie mixte prudente du joueur 2 alors $q_3 = q_4 = 0$ puis $(q_1, q_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (pourquoi ?). Autrement dit $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

Pour le joueur 1 on sait que si (p_1, p_2, p_3, p_4) est une stratégie mixte prudente alors $p_4 = 0$ puisque la stratégie 4 est strictement dominée. La stratégie 3 est une bonne réponse à la stratégie mixte prudente du joueur 2 donc ne peut être éliminée d'emblée. On est ainsi amené à chercher les triplets (p_1, p_2, p_3) de réels positifs de somme 1 qui maximise l'espérance de gain garantie

$$\begin{aligned} \inf_{(q_j) \in \Delta_4} G((p_1, p_2, p_3, 0), (q_j)) &= \min_{(q_j) \in \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}} G((p_1, p_2, p_3, 0), (q_j)) \\ &= \min \left(2p_1 + 4p_2 + 4(1 - p_1 - p_2), 6p_1 + 2p_2 + 2(1 - p_1 - p_2), \right. \\ &\quad \left. 5p_1 + 3p_2 + 2(1 - p_1 - p_2), 8p_2 + 6(1 - p_1 - p_2) \right) \\ &= \min \left(-2p_1 + 4, 4p_1 + 2, 3p_1 + p_2 + 2, -6p_1 + 2p_2 + 6 \right) \end{aligned}$$

Posons $G_1(p_1, p_2) = \min(4 - 2p_1, 4p_1 + 2, 3p_1 + p_2 + 2, -6p_1 + 2p_2 + 6)$.

Nous proposons deux méthodes pour trouver les couples (p_1, p_2) où G_1 est maximal. La première est identique à la première méthode de recherche des stratégies mixtes prudentes du joueur 2 dans l'exemple de la section précédente. Elle est fastidieuse. La seconde méthode utilise la valeur de l'extension mixte du jeu obtenue plus haut et est bien plus courte.

1ère méthode :

G_1 est affine par morceaux sur un domaine convexe fermé et borné. On peut chercher les points du domaine en lesquels G_1 est maximal en déterminant d'abord les coins des morceaux sur lesquels G_1 est affine. Les morceaux en question sont donnés par les systèmes d'inégalités

$$\begin{aligned} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ -2p_1 + 4 \leq 4p_1 + 2 \\ -2p_1 + 4 \leq 3p_1 + p_2 + 2 \\ -2p_1 + 4 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{aligned}$$

morceau noté 1 sur lequel $G_1(p_1, p_2) = -2p_1 + 4$;

$$\begin{aligned} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ 4p_1 + 2 \leq -2p_1 + 4 \\ 4p_1 + 2 \leq 3p_1 + p_2 + 2 \\ 4p_1 + 2 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{aligned}$$

morceau noté 2 sur lequel $G_1(p_1, p_2) = 4p_1 + 2$;

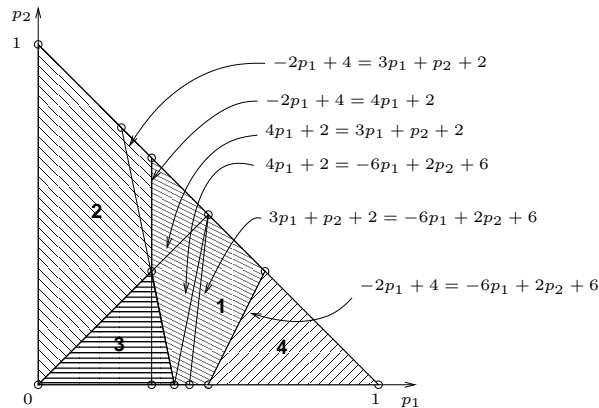
$$\begin{aligned} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq -2p_1 + 4 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq 4p_1 + 2 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{aligned}$$

morceau noté 3 sur lequel $G_1(p_1, p_2) = 3p_1 + p_2 + 2$;

$$\begin{aligned} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 &\leq 1 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 &\leq -2p_1 + 4 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 &\leq 4p_1 + 2 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 &\leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{aligned}$$

morceau noté 4 sur lequel $G_1(p_1, p_2) = -6p_1 + 2p_2 + 6$.

Un ou plusieurs des morceaux peut être vide. Les coins des morceaux font partie des points donnés par deux égalités parmi les inégalités ci-dessus, par exemple $p_1 = 0$ et $p_1 + p_2 = 1$ (le point $(0, 1)$) ou bien $p_1 = 0$ et $4p_1 + 2 = -2p_1 + 4$ (pas de solution) ou bien $4p_1 + 2 = -2p_1 + 4$ et $4p_1 + 2 = 3p_1 + p_2 + 2$ (le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$). Voici le dessin avec en hachuré les différents morceaux :



On trouve sur le dessin 8 coins. Il faut déterminer ces 8 coins, calculer la valeur de G_1 en ces coins et sélectionner les coins où G_1 est maximal. L'ensemble des points (p_1, p_2) où G_1 est maximal est l'enveloppe convexe des coins sélectionnés. Nous abandonnons la course presque à la ligne d'arrivée.

2ème méthode :

On sait que $\max_{\substack{p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 \leq 1}} G_1(p_1, p_2) = \underline{G} = \frac{10}{3}$. Si (p_1, p_2) réalise le max de G_1 on a donc

$$-2p_1 + 4 \geq \frac{10}{3}, \quad 4p_1 + 2 \geq \frac{10}{3}, \quad 3p_1 + p_2 + 2 \geq \frac{10}{3} \text{ et } -6p_1 + 2p_2 + 6 \geq \frac{10}{3},$$

avec bien sûr les contraintes $p_1, p_2 \geq 0$ et $p_1 + p_2 \leq 1$. Les deux premières inégalités donnent $p_1 = \frac{1}{3}$. En substituant à p_1 sa valeur, les deux inégalités suivantes deviennent équivalentes à $3p_2 \geq 1$. On obtient donc $G_1(p_1, p_2)$ est maximal ssi $p_1 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} \leq p_2 \leq \frac{2}{3}$.

Conclusion : les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 sont les quadruplets $(\frac{1}{3}, p, \frac{2}{3} - p, 0)$ avec $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.