L2 Mass Théorie des jeux – cours 1 [1]

1. Jeux sous forme extensive, jeux sous forme normale

On ne considère dans ce cours que les jeux non coopératifs (les joueurs ne passent pas d'accord entre eux) à deux joueurs.

Un jeu sous forme normale est la donnée de :

- pour chaque joueur, un ensemble de stratégies
- pour chaque choix d'une stratégie par le joueur 1 et d'une stratégie par le joueur 2, un paiement du joueur 1 et un paiement du joueur 2

Si chacun des deux joueurs ne dispose que d'un nombre fini de stratégies, on peut représenter le jeu par la matrice des couples (paiement du joueur 1, paiement du joueur 2).

Le jeu est dit à somme nulle si pour chaque choix d'une stratégie par le joueur 1 et par le joueur 2 la somme des paiements des deux joueurs est nulle. Dans le cas où les stratégies à disposition des deux joueurs sont en nombre fini on peut alors représenté le jeu par la seule matrice de paiement du joueur 1, la matrice de paiement du joueur 2 étant l'opposé de celle du joueur 1.

Ex. Le jeu des "pièces de monnaie concordantes" sous forme normale

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}.$$

Ce jeux est à somme nulle ; on peut le représenter par la matrice de paiement du joueur 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un jeu sous forme extensive est un jeu se jouant en un certain nombre d'étapes suivant une certaine règle avec l'attribution à l'issue du jeu d'un paiement à chaque joueur. Exemple : les jeux de cartes Pocker, etc., le jeu d'échec.

Une stratégie pour un joueur est alors une suite d'actions conditionnelles (conditionnelle à l'état du jeu, à l'action de l'autre joueur) explicité avant le début du jeu et qui guide sans ambiguité le joueur jusqu'à l'issue du jeu. L'explicitation de toutes les stratégies du joueur 1 et du joueur 2 et le calcul pour chaque paire de stratégie du paiement final de chacun des joueurs fournissent la forme normale du jeu.

2. Quelques exemples de jeux

a. Le dilemme des prisonniers

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (-1,4) \\ (4,-1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

jeu à somme non nulle, symétrie, stratégie strictement dominante, un seul comportement rationnel au vu de la matrice de paiement et de l'objectif "optimisation par chaque joueur de son gain propre", paradoxe : le paiement n'est pas optimal.

b. Le dilemme des prisonniers avec une autre matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (-1,2) \\ (2,-1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Il n'y a plus de stratégie dominante. Courbe de meilleure réponse, à l'intersection équilibre de Nash (aucun joueur ne regrette a posteriori son choix), stratégies prudentes (celles qui minimisent le plus mauvais paiement possible du joueur).

[1] F.-X. Dehon, 19 septembre 2008, dehon@unice.fr

c. Le jeu des pièces concordantes

$$\begin{pmatrix} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{pmatrix}.$$

Jeu à somme nulle, toutes les stratégies sont prudentes, aucun équilibre de Nash, lorsque le jeu est répété : importance d'être imprévisible $\rightsquigarrow$ stratégies mixtes : le joueur 1 joue P avec probabilité $\frac{1}{2}$, F avec probabilité $\frac{1}{2}$ (il lance la pièce). Gain moyen après n jeux avec n grand (loi des grands nombres), gain espéré avant le jeu sous l'hypothèse que les joueurs jouent indépendemment.

d. Les deux généraux

Jeu à somme nulle

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pas d'équilibre de Nash $\rightsquigarrow$ importance d'être imprévisible. Gain espéré du général A s'il choisit sa stratégie avec un dé à 5 faces, selon la stratégie choisie par B. Elimination des stratégies dominées de B puis de A $\rightsquigarrow$ gain espéré de A s'il choisit entre ses trois stratégies restantes avec un dé à 3 faces.

Pourquoi A ne peut-il pas éliminer la stratégie 2 ?