

1) (Jeu des généraux) Deux généraux ennemis se livrent à un duel stratégique. Le général Y, le défenseur, doit empêcher le général X, l'attaquant, de passer la frontière, qui se trouve être un massif montagneux. Deux chemins sont possibles : passer par la vallée, ou passer par un col de haute montagne. S'ils se rencontrent dans la vallée, l'issue du combat sera partagée, pas de vaincu ni de vainqueur. Mais si l'attaquant décide de passer par le col, il sait qu'il perdra des hommes si jamais son adversaire l'y attend.

Modéliser cette situation, en construisant une matrice de paiement. Y'a-t-il un point selle ? Déterminer les meilleures stratégies pour chacun des belligérants.

2) La matrice de paiement d'un certain jeu est :

a	b
c	d

Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que le jeu admette a comme point selle.

3) Etudier pour chacune des 3 matrices de paiement, l'existence de points selle. Dans le cas affirmatif indiquer les stratégies optimales pour chacun des joueurs X et Y.

Stratégies	y_1	y_2
x_1	5	4
x_2	1	2

Stratégies	y_1	y_2	y_3
x_1	1	-1	3
x_2	0	3	-1

Stratégies	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	1	-2
x_2	3	1	4	-1
x_3	0	-2	1	-2
x_4	-2	-1	2	1
x_5	2	3	1	1

TD N° 3

3) (Exemple classique) En novembre 1713, dans une lettre à Nicolas Bernoulli, Rémond de Montmort propose un jeu « de pure raison » qui lui paraît insoluble » :

« Un père veut donner les étrennes à son fils et lui dit : Je vais mettre dans ma main un nombre de jetons pair ou impair, comme je le jugerai à propos ; Cela fait :

- si vous nommez pair et qu'il y a pair dans ma main, je vous donnerai deux écus ;
- si vous nommez impair et qu'il y a pair dans ma main, vous me donnerez un écu ;
- si vous nommez impair et qu'il y a impair dans ma main, vous aurez un écu ;
- si vous nommez pair et qu'il y a impair dans ma main, vous me donnerez un écu. »

Modéliser ce jeu par une matrice de payement (X sera le fils et Y sera le père). Y a-t-il des points selle ?

Quelle serait la meilleure stratégie pour le fils ? Et pour le père ? Que se passera-t-il si les deux appliquent ces stratégies ?

1) Déterminer une matrice réduite au maximum de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Déterminer la valeur du jeu.}$$

2) (6 points) a) Deux joueurs X et Y jouent au jeu suivant (X commence toujours) :

Trois points A , B et C sont disposés dans le plan. Chaque joueur choisit une orientation entre deux points M et N , c'est-à-dire il dessine une ligne fléchée ou de M vers N ou de N vers M . Si on a choisi une orientation entre deux points, on ne peut plus choisir l'orientation contraire, c'est-à-dire si on a orienté M vers N on ne peut pas orienter N vers M . Le premier qui obtient un chemin direct (toujours fléché dans le même sens, avec des orientations provenant de lui ou de l'autre) passant par les trois points à gagné. Prouver que Y a une stratégie gagnante.

On joue au même jeu mais avec quatre points A, B, C et D . Prouver que cette fois c'est le joueur X qui a une stratégie gagnante.

b) On généralise, c'est-à-dire on joue avec n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. Quel est, en fonction de n le nombre total d'orientations qu'on peut faire ? Faites une conjecture dans le cas général.

Commentaire : En tout orientant, vous obtenez à la fin un genre de graphe qu'on appelle tournoi (pourquoi ce nom ?)

3) (6 points) On considère le jeu dont la matrice de paiement est $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Y'a-t-il des points selle ? Indiquer en fonction de $p \in [0;1]$ et de $q \in [0,1]$ les ensembles X' et Y' des stratégies mixtes de X et de Y . Déterminer en fonction de p et de q la fonction de paiement $\bar{u}$ du prolongement mixte. Déterminer la valeur du prolongement mixte.

1) x et y sont deux réels tels que $x > y \geq 0$. On considère la matrice :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ x+y & x-y \end{pmatrix}.$$

On considère le jeu J dont la matrice de paiement est $A(x, y)$.

- a)** Prouver que le jeu admet toujours au moins point selle.
- b)** Dans quel cas le jeu admet-il deux points selle ?
- c)** Déterminer, selon les valeurs de x et de y , la valeur du jeu.
- d)** Pour quelles valeurs de x et de y , la matrice $A(x, y)$ est-elle stochastique ?

2) Deux personnes A et B jouent aux échecs. Il se trouve qu'à un moment de la partie, le joueur A n'a pas de stratégie gagnante. Prouver alors, en admettant que B joue les meilleurs coups, qu'à tout autre moment de la partie, le joueur A n'a toujours pas de stratégie gagnante.