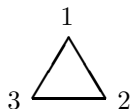


7 décembre 2007

Examen

Durée : 2 heures

1. A chaque instant un mobile se déplace d'un sommet d'un triangle équilatéral à un sommet contigu dans le sens des aiguilles d'une montre avec une probabilité $(1 - p)$ et en sens inverse avec probabilité p .



- Ecrire la matrice de transition de ce processus de Markov.
- Le mobile est au sommet 1 au temps 0. Quelle est la probabilité qu'il se trouve en 1 au temps 3 ? Quelle est la probabilité qu'il se trouve en 2 au temps 3 ?
- La matrice de transition est-elle régulière ? (Discuter suivant la valeur de p .)
- On note p_n la probabilité que le mobile se trouve au sommet 1 au temps n . La suite (p_n) admet-elle une limite quand n tend vers ∞ ? (Discuter suivant la valeur de p .) Que vaut cette limite si elle existe ?

2. Deux joueurs X et Y doivent choisir en même temps soit le nombre 1 soit le nombre 2.

Si les deux choisissent le même nombre, alors X doit payer à Y la valeur monétaire du nombre choisi.

Si le nombre est différent c'est Y qui doit payer la valeur monétaire du nombre qu'il a choisi.

- Ecrire la forme normale de ce jeu.
- Déterminer les stratégies optimales des deux joueurs.

3. Démontrer que dans un jeu à deux joueurs et à somme nulle les points selles ont un paiement identique.

4. Stratégies mixtes optimales pour un jeu à deux joueurs à somme nulle

On considère le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a. Ce jeu admet-il une valeur en stratégie pure ?

b. On considère le prolongement mixte du jeu.

Qu'est-ce qu'une stratégie mixte du joueur 1 ?

Que vaut l'espérance de gain du joueur 1 pour un couple de stratégies mixtes (du joueur 1 et du joueur 2) donné ?

Que vaut l'espérance de gain garantie du joueur 1 pour une stratégie mixte donnée du joueur 1

Quand dit-on qu'une stratégie mixte donnée du joueur 1 est optimale ? Même question pour une stratégie mixte donnée du joueur 2.

Pour une matrice de paiement quelconque $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, comment se compare l'espérance de gain garantie du joueur 1 pour une stratégie mixte optimale du joueur 1 avec l'espérance de gain garantie du joueur 2 pour une stratégie mixte optimale du joueur 2 ? Qu'en serait-il si on ne considérait que des stratégies pures optimales ?

c. Calculer la valeur du jeu en stratégie mixte.

d. Déterminer l'ensemble des stratégies mixtes optimales du joueur 1 et l'ensemble des stratégies mixtes optimales du joueur 2.

e. Reprendre les deux questions précédentes pour la matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Matrice de transition régulière et longueur des chemins

On considère une chaîne de Markov d'états $\{i, 1 \leq i \leq r\}$ et de matrice de transition $P = (p_{i,j})$ où $p_{i,j}$ est la probabilité de passer en une étape de l'état i à l'état j .

Un chemin de l'état i à l'état j est une suite $(i_1, \dots, i_n)$ d'états avec $n \geq 2$, $i_1 = i$, $i_n = j$ vérifiant $\forall k \in \{1, \dots, n\}, p_{i_k, i_{k+1}} > 0$. La longueur d'un tel chemin est l'entier $n - 1$.

a. Montrer que si P est régulière alors pour chaque état i il existe un entier n , un chemin de longueur n de i à i et un chemin de longueur $n + 1$ de i à i .

b. On considère la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quelles sont les longueurs des chemins de l'état 1 à l'état 1 ? de l'état 3 à l'état 3 ?

La matrice P est elle régulière ? Si oui pouvez-vous expliciter un entier n tel que P^n soit à coefficients strictement positifs ?

c. Mêmes questions avec la matrice de transition $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.