

EXAMEN JEUX ET DÉCISIONS

tous documents autorisés, calculatrice autorisée et inutile

Première partie : THÉORIE DES JEUX

(14 points, temps recommandé : 1h20)

NB. Les solutions des exercices sont assez courtes, mais il ne faut pas perdre de temps.

Exercice 1

On considère un jeu à deux joueurs X et Y de somme nulle tel que X a deux stratégies x_1 et x_2 , et Y a n stratégies.

a) Montrer que pour calculer la valeur de ce jeu en stratégies mixtes, on peut se ramener à un jeu (X, Y', u) où $Y' \subseteq Y$ a $m \leq n$ stratégies $y_1, \dots, y_m$ telles que :

$$u(x_1, y_1) > u(x_1, y_2) > \dots > u(x_1, y_m),$$

$$u(x_2, y_1) < u(x_2, y_2) < \dots < u(x_2, y_m).$$

b) Application au jeu suivant (le tableau donne le gain de X , ici $n = 8$) :

1	2	6	3	1	4	$\frac{3}{2}$	3
3	0	$-\frac{1}{2}$	4	2	-1	3	$\frac{1}{2}$

Combien vaut m ? Ecrire le tableau de paiement du jeu déduit du a). Calculer sa valeur en stratégies mixtes et les stratégies mixtes optimales pour X et Y' .

Exercice 2

Alice et Barnabé vivent ensemble, elle préfère aller danser et lui préfère aller au match de football. Certains soirs, chacun peut choisir soit d'aller danser, soit d'aller au match. On mesure alors leur plaisir par un gain.

a) Au début de leur union, leur priorité est d'être ensemble. Lorsqu'ils sont séparés, leur gain est de 0. Lorsqu'ils vont danser, elle gagne 3 et lui gagne 1. Lorsqu'ils vont au match, il gagne 3 et elle gagne 1.

Ecrire le tableau de gains de ce jeu de somme non nulle. Trouver (si ils existent) les équilibres en stratégies dominantes, les équilibres de Nash, et les optimum coopératifs Pareto de ce jeu.

b) Après vingt ans d'union, une chose a changé : lorsque chacun fait ce qu'il préfère de son côté, chacun gagne 2.

→

Ecrire le tableau de gains de ce jeu de somme non nulle. Trouver (si ils existent) les équilibres en stratégies dominantes, les équilibres de Nash, et les optimum coopératifs Pareto de ce jeu.

Exercice 3

On considère un jeu à deux joueurs de somme nulle (X, Y, u) symétrique, c'est à dire tel que $X = Y$ et pour tout $x, y \in X$

$$u(x, y) = -u(y, x).$$

Montrer que si le jeu a une valeur en stratégie pure alors cette valeur est 0 et X et Y ont les mêmes stratégies optimales.

Exercice 4

Deux duellistes X et Y s'affrontent au revolver : ils avancent l'un vers l'autre et chacun peut tirer un seul coup de feu. A la date $t = 0$, les deux joueurs sont très distants. A la date $t = 1$ ils se touchent. Deux fonctions a et b de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ mesurent respectivement l'habileté de X et Y . La probabilité que X touche Y en tirant son coup de feu à la date $t = x$ est notée $a(x)$, et la probabilité que Y touche X en tirant son coup de feu à la date $t = y$ est notée $b(y)$. On a donc $a(0) = b(0) = 0$ et $a(1) = b(1) = 1$, et les fonctions a et b sont strictement croissantes. Un joueur touché perd 1 et son adversaire gagne 1.

a) Chaque joueur peut choisir comme stratégie la date à laquelle il va tirer. On considère le jeu $([0, 1], [0, 1], u)$ de somme nulle, dont la fonction de paiement u mesure l'espérance de gain du joueur X .

Montrer que :

- si $x < y$ alors $u(x, y) = 2a(x) - 1$
- si $y < x$ alors $u(x, y) = 1 - 2b(y)$
- si $x = y$ alors $u(x, y) = a(x) - b(x)$

b) Montrer que le jeu a une valeur en stratégie pure. Trouver la ou les stratégies optimales des deux duellistes en stratégie pure (i. e. trouver les points selles du jeu).