

MODELISATION

Option : L1 MASS

D.SOUBIRAN-ZONE
M.MINICONI

Année 2005-2006

Ch1. Les jeux mathématiques.

Jeu à deux joueurs et à somme zéro.

§1.1 Jeux à deux joueurs et à somme zéro

Si deux joueurs X et Y s'affrontent, dans un souci de simplification on notera aussi X l'ensemble des stratégies possibles du joueur X et Y l'ensemble des stratégies possibles du joueur Y :

on appellera alors jeux à deux joueurs et à somme zéro le triplet (X, Y, u) avec :

$X = \{x_i \in X, \text{ avec } x_i \text{ stratégie possible du joueur } X \text{ et } i = 1, 2, \dots, n\}$; si le joueur X dispose de n stratégies possibles}

$Y = \{y_i \in Y, \text{ avec } y_i \text{ stratégie possible du joueur } Y \text{ et } i = 1, 2, \dots, m\}$; si le joueur Y dispose de m stratégies possibles}

$u : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, qui à toute paire de stratégies $(x, y) \in X \times Y$ associe le paiement $r \in \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow u(x, y) = r \in \mathbb{R}$

Par convention on assumera ici que r est la somme que Y doit payer à X. (Il va de soi que on aurait pu assumer que r est la somme que X doit payer à Y, l'important étant de choisir dès le départ et de s'y tenir !!)

§1.2 Représentation d'un jeu sous forme normale

Si on représente les n stratégies du joueur X en ligne et les m stratégies du joueur Y en colonne la simple lecture de la matrice $n \times m$ ayant comme entrées les valeurs de la fonction de paiement nous permettra une représentation très commode du jeu.

Exemple (1) :

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	+1	-1
x_2	-2	-4	+1
x_3	-3	+2	-4

On lira donc : « si X choisit la stratégie x_1 et Y choisit la stratégie y_1 , alors le joueur

Y doit payer -2 au joueur X, i.e. X doit payer 2 à Y »

De même on lira : « si X choisit x_3 et Y choisit y_2 alors Y doit payer 2 à X, si X choisit x_3 et Y choisit y_3 alors X payera 4 à Y, etc »

Avec la convention relative au paiement il est évident que X doit choisir une stratégie qui maximise $u(x, y)$, alors que Y doit raisonnablement en choisir une qui le minimise.

Les deux joueurs sont supposés être également intelligents, rationnels et également informés.

Chacun est donc parfaitement capable d'effectuer le raisonnement de l'autre et d'agir de conséquence.

Si on reprend l'exemple (1) et on regarde la matrice des paiements successivement du point de vue de Y et de X, on peut donc observer que :

Point de vue de Y « si X choisit x_1 alors je dois choisir y_1 (paiement minimum vu le choix de X) car ainsi je minimiserai ma perte (je gagnerai 2), si X choisit x_2 je choisirai y_2 et si X choisit x_3 je choisirai y_3 ».

Point de vue de X « si Y choisit y_1 , je choisirai x_1 ou x_2 (paiement maximum vu le choix de Y), si Y choisit y_2 je choisirai

x_3 »

Nous allons noter les choix de X et de Y respectivement en colonne et en ligne

	y_1	y_2	y_3	
x_1	-2	+1	-1	-2
x_2	-2	-4	+1	-4
x_3	-3	+2	-4	-4
	-2	+2	+1	

Maximin = -2, Max (-2, -4, -4) = choix de X
minMax = -2, min (-2, 2, 1) = choix de Y

Parmi les paiements minimaux proposés par Y il va de soi que X choisira le plus grand et parmi les paiements maximaux proposés par X le joueur Y ne pourra que choisir le plus petit ! C'est la méthode du minMax (pour Y) et Maxmin (pour X).

Si $\text{Maxmin} = \text{minMax}$ on dit que le jeu admet une valeur en stratégie pure et on notera val $u = \text{Maxmin} = \text{minMax}$
 Ici $\boxed{\text{val } u = -2}$

Exemple (2) :

	y ₁	y ₂	y ₃	
x ₁	-1	+1	-1	-1
x ₂	-2	-4	+1	-4
x ₃	-3	+2	-4	-4
	-1	+2	+1	

$\text{Maxmin} = -1$, $\text{Max}(-1, -4, -4) = \text{choix de X}$
 $\text{minMax} = -1$, $\text{min}(-2, 2, 1) = \text{choix de Y}$

$\text{Maxmin} = \text{minMax}$, donc ce jeu admet une valeur en stratégie pure.

Exercice (1) : Soit le jeu à deux joueurs et à somme zéro représenté par la matrice de paiement suivante :
 déterminer, si elle existe, la valeur de ce jeu en stratégie pure.

	Stratégies de Y				
Stratégies de X	-1	+1	+1	-1	-1
	-2	-3	+2	+2	-3
	-2	+1	-2	+1	-2
	-1	-3	+4	+1	-3
	-1	+1	+4	+2	

$-1 = \text{Maxmin}$
 $-1 = \text{minMax}$

Solution :

$\text{Maxmin} = -1 = \text{minMax}$, donc val $u = -1$

Il semble légitime à ce stade de se poser la question « Les points $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1, y_4)$, $T(x_4, y_1)$ ayant tous pour image dans $\mathbf{R}$ la valeur $\boxed{-1 = \text{valu}}$, correspondent-ils à des paires de stratégies optimales pour les joueurs ? »

A savoir : si le joueur X choisit la stratégie x_1 et le joueur Y choisit y_1 , ou si X choisit x_1 et Y choisit y_4 , ou si X choisit x_4 et Y choisit y_1 , les deux joueurs sont-ils confrontés à des choix équivalents ?

Pour répondre à cette question il est indispensable de connaître et bien comprendre la définition suivante :

§1.3 Les points selles

Un point $S(x^*, y^*)$ est un point selle pour un jeu à deux joueurs et à somme zéro ssi :

(déf.2) $\boxed{u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y)}$

à savoir " si X déplace son choix de stratégie de manière unilatérale de x^* à une autre stratégie $x \neq x^*$, alors que Y conserve son choix y^* , le paiement diminue (donc X s'auto-pénalise, car $\boxed{u(x, y^*) \leq u(x^*, y^*)}$) et de même si Y modifie son choix de y^* à une autre stratégie $y \neq y^*$ alors que X conserve le choix x^* le paiement augmente (donc Y sera aussi pénalisé, car $\boxed{u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y)}$)

Le point $S(x^*, y^*)$ constitue ainsi le meilleur compromis possible entre les deux joueurs : on parle alors de choix prudent.

Il ne faut jamais oublier que chaque joueur est parfaitement capable et dispose de toute l'information nécessaire pour simuler avec exactitude le raisonnement de l'autre !

On peut désormais utiliser la (déf.2) pour répondre à la question posée à la fin de l'exercice (1) :

Si $P(x_1, y_1)$ est un point selle alors le choix de stratégies (x_1, y_1) doit satisfaire: $\boxed{u(x, y_1) \leq u(x_1, y_1) \leq u(x_1, y)}$

or $u(x, y_1) = -1$ ou $-2 \leq u(x_1, y_1) = -1 \leq u(x_1, y) = -1$ ou $+1$ donc P est un point selle

Si $Q(x_1, y_4)$ est un point selle alors le choix de stratégies (x_1, y_4) doit satisfaire: $\boxed{u(x, y_4) \leq u(x_1, y_4) \leq u(x_1, y)}$

mais $u(x,y_4) = -1$ ou $+1$ ou $+2$ n'est pas toujours $\leq u(x_1,y_4) = -1$, la double inégalité de la (déf.2) n'est donc pas vérifiée :

Q ne peut pas être un point selle pour le jeu donné.

Vous pouvez maintenant facilement démontrer que $T(x_4,y_1)$ ne sera pas un point selle !

Le jeu admet donc un seul point selle : le point $P(x_1,y_1)$.

X a donc une seule stratégie optimale : la stratégie x_1 ; Y a aussi une seule stratégie optimale : la stratégie y_1 .

Théorème 1 : Si l'ensemble **S** de tous les points selles d'un jeu est non vide i.e. $\mathbf{S} \neq \emptyset$ alors le paiement est le même dans tous les points selles et ces derniers sont interchangeables. (A savoir : si (x_1,y_1) et (x_2,y_2) sont des points selles, alors (x_1,y_2) et (x_2,y_1) sont aussi des points selles.)

Ch 2-Équilibres non coopératifs :

Nous avons déjà vu que la théorie des jeux est une formalisation mathématique de conflits entre deux ou plusieurs agents.

Nous allons ici définir un jeu à n joueurs comme la donnée, pour chaque joueur i , d'un ensemble de stratégies X_i et d'une fonction de gain u_i définie sur le produit cartésien $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ et à valeurs dans R , avec $1 \leq i \leq n$.

C'est donc l'ensemble des stratégies X_i qui décrit l'ensemble des possibilités d'action du joueur i .

A savoir i « décide librement le choix de sa stratégie $x_i \in X_i$ ».

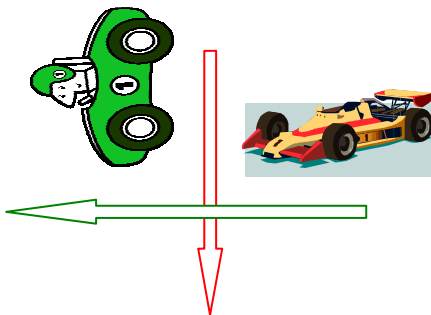
Dès que chaque joueur a pris sa décision, il en résulte une issue $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de laquelle chaque joueur i obtiendra un gain $u_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ces gains sont facilement comparables, car la fonction de gain est à valeurs dans R .

N.B. La fonction de gain u_i est souvent appelée « fonction de paiement », ou encore « fonction d'utilité » du joueur i .

Exemple : (un grand classique !)

« Le jeu du croisement »



Deux voitures arrivent en même temps à un croisement, chaque conducteur peut soit s'arrêter soit passer. Il est évident que chacun préfère passer et « forcer » l'autre à s'arrêter !

Le gain minimal pour les deux sera obtenu si les deux passent en même temps.

Si un s'arrête il évite l'accident, son « gain » sera donc inférieur par rapport à l'issue où il aurait forcé l'autre à s'arrêter (car il va perdre du temps), mais supérieur à l'issue qui conduit à l'accident.

Ce jeu est donc bien représenté par le tableau suivant :

	Stop	Passe
Stop	1/1	1/2
Passe	2/1	0/0

en haut à gauche : les gains du conducteur 1, en bas à droite : les gains du conducteur 2

Chaque case correspond à une issue du jeu.

Il s'agit maintenant de trouver « les équilibres éventuels »

d'un jeu désigné par $(X_i, u_i)_{i \in I}$, avec $I = 1, 2, \dots, n$.

Dans un souci de simplification d'écriture on notera :

$X_{-i} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$ et de même $x_{-i} = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{i-1} \times x_{i+1} \times \dots \times x_n$

d'où $X = (X_i, X_{-i})$ et $x = (x_i, x_{-i})$

Si on assume que les joueurs n'ont aucune possibilité de communication entre eux ni aucune raison de se faire confiance, on dira que :

Définition 1 : Une issue $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est un équilibre de Nash du jeu $(X_i, u_i)_{i \in I}$ si elle vérifie

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i \text{ alors } u_i(x_i, x_{-i}^*) \leq u_i(x^*)$$

Le jeu de l'exemple précédent possède ainsi deux équilibres de Nash : (Stop, Passe) et (Passe, Stop)

Commentaires :

*Les stratégies du conducteur 1 étant en ligne, les flèches rouges correspondent à ses changements avantageux de stratégies, alors que les stratégies du conducteur 2 étant en colonne ce sont les flèches vertes qui

**Le comportement à l'équilibre de Nash du joueur i est de considérer les stratégies de ses adversaires comme données et de maximiser son gain sur l'ensemble des choix possibles.

***L'exemple choisi montre bien que « il y a lutte pour le premier coup », car les niveaux de satisfaction aux deux points d'équilibre sont différents pour les deux joueurs !

****Un jeu ne possède pas toujours des équilibres de Nash !

par exemple :

1 / -1	-1 / 1
-1 / 1	1 / -1

n'admet pas d'équilibres de Nash (vérifier que les flèches ne sont jamais concurrentes dans une case).

***** On démontrera (mais pas cette année !!) que

Théorème : Si les $(X_i)_{i \in I}$ sont des espaces vectoriels topologiques fermés et bornés (compacts) et les fonctions de gain définies par $x_i \propto u_i(x_i, y_{-i})$ sont continues et concaves $\forall i$ et $\forall y_{-i}$ alors il existe au moins un équilibre de Nash.



Un pas de plus.....

Un inconvénient de l'équilibre de Nash est qu'il peut ne pas être avantageux d'un point de vue collectif.

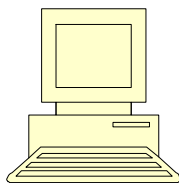
Définition 2 : On dit que l'issue $x = (x_1, \dots, x_n)$ du jeu $(X_i, u_i)_{i \in I}$ est dominée par l'issue $y = (y_1, \dots, y_n)$ si $\forall i \in I$ on a : $u_i(x) \leq u_i(y)$ et $\exists i_0, t, q. u_{i_0}(x) < u_{i_0}(y)$.

On appelle Optimum de Pareto une issue qui n'est dominée par aucune autre.

Exemple : « le dilemme du prisonnier »

J'attends vos questions !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

A vos ordres !!!

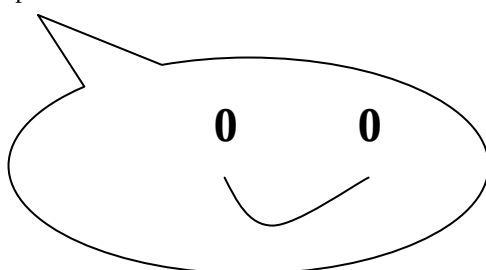


Questions diverses

1) Un million à prendre

Préférez vous avoir un million d'euros le 10 mars et puis plus rien jusqu'au 9 avril, ou préférez vous avoir un euro le 10 mars en sachant que cette somme doublera chaque jour jusqu'au 9 avril ?

Mr. X a choisi le million, Mr. Y a préféré se contenter d'un euro !



2) Les chameaux d'Ali

Les quatre fils d'Ali doivent se partager l'héritage de 39 chameaux laissés par leur père en respectant ses dernières volontés,

à savoir : l'aîné doit avoir la moitié, le second le quart, le troisième doit avoir un huitième et le plus jeune un dixième.

Pouvez vous les aider à effectuer ce partage ?

Pour vous aider on peut vous affirmer que l'aîné aura 20 chameaux, le second en aura 10, le troisième 5 et le plus jeune 4; ($20+10+5+4=39$) et il est évident que les fils d'Ali seront plus que satisfaits par cette solution.

3) Pile ou face ?

Deux joueurs jouent avec deux pièces chacun, une ayant deux piles (pièce P) et une ayant deux faces (pièce F .)

Les stratégies possibles sont « choisir la pièce P ou choisir la pièce F ».

X gagne 10 € si l'issue est pile-pile, Y gagne 10 € si l'issue est face-face.

Que pouvez vous dire de ce jeu ?

4) « Le dilemme du prisonnier » (Un jeu à somme variable)

voir « Equilibre de Nash »

5).. Comment choisir entre un taux d'intérêt continu et un taux mensuel ? rappel :

$$1^\infty = ?$$

pour toute fonction $u(x)^{v(x)}$ avec $u(x) > 0, \forall x$ on peut écrire :

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

dans ce cas

$$1^\infty = e^{\infty \cdot 0}$$

est une forme indéterminée !

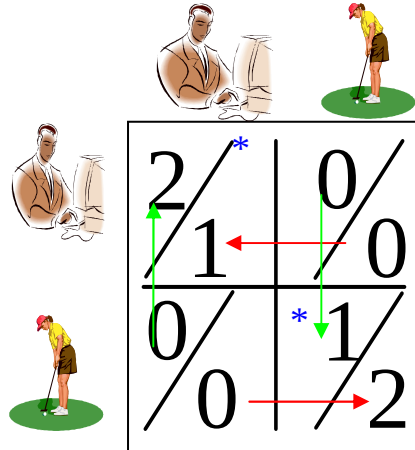
avant de répondre à la question 5) calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

6) Caractériser un joueur qui n'aime pas le risque, puis déterminer sa couverture optimale en cas d'un sinistre qui entraîne une perte L.

si vous avez des difficultés demandez par mail la correction de vos solutions.

La bataille "des sexes"

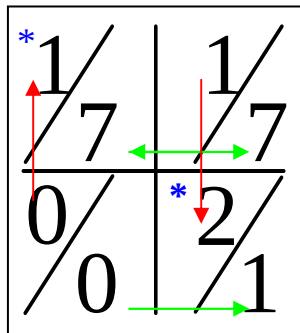
Dimanche après-midi : madame veut aller jouer au golf !
Monsieur ne rêve que de rester tranquille devant son ordinateur !



Notre couple a deux équilibres de Nash (*).

Un peu de « culture » : Un équilibre de Nash est dit parfait si il constitue un équilibre pour le jeu et chacun de ses sous-jeux. Quelle sera votre définition de sous-jeu ??

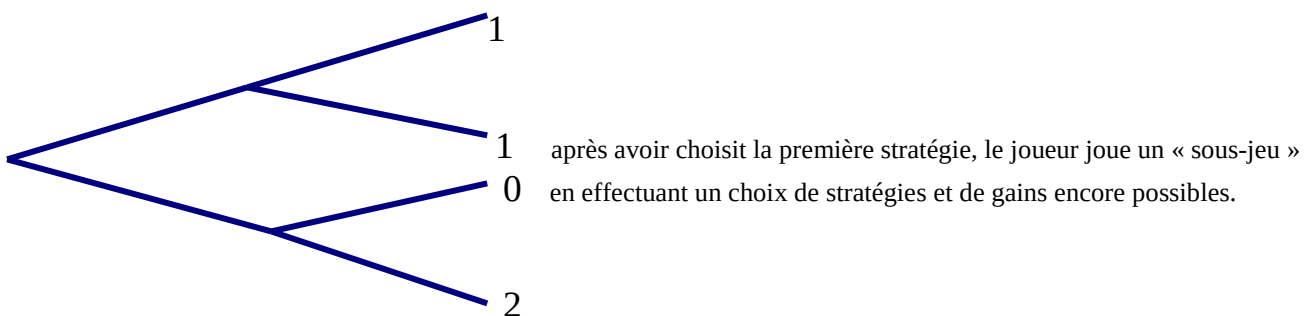
Un autre jeu ! :



Deux équilibres de Nash (*).

Que se passera-t-il si Y peut jouer après avoir observé le choix de X ?

Observons la forme extensive de ce même jeu :



On peut déterminer les équilibres de Nash en utilisant l'arbre : dans le sous-jeu X est obligé de préférer la branche du bas, qui lui rapporte 2, donc Y choisira sa stratégie y_2 et la paire (x_2, y_2) est un équilibre de Nash parfait.



Attention ! L'équilibre de Nash (x_1, y_1) est bien un équilibre globale, mais il n'est pas un équilibre pour le sous-jeu, il n'est donc pas parfait !!!

Un autre jeu ! : L'avantage d'être patient !

Deux actionnaires doivent se partager 1 millions d'euros de bénéfice conséquent à un investissement qui ne leur a pas demandé les mêmes engagements..

Ils ne souhaitent pas négocier longtemps. Il décident donc que X fera d'abord une proposition, puis Y pourra effectuer une contre-proposition, qui pourra ou non être acceptée par X.

Si leur décision n'est pas prise à une certaine date ils seront obligés de réinvestir la somme totale au risque de la perdre !

A votre avis doivent-ils limiter ou non le nombre de propositions ?

Pensez vous trouver des équilibres de Nash parfaits ?

EXERCICES

1) Pile ou face ?

Deux joueurs jouent avec deux pièces chacun, une ayant deux piles (pièce $\mathcal{P}$) et une ayant deux faces (pièce $\mathcal{F}$.)

Ils lancent simultanément les pièces choisies.

Les stratégies possibles sont « lancer la pièce $\mathcal{P}$ ou lancer la pièce $\mathcal{F}$ ».

Si l'issue est pile-pile ou face-face X gagne 10 € et Y perd 10 €.

Si l'issue est pile-face Y gagne 10 € et X perd 10 €.

- Calculer les équilibres de Nash de ce jeu.
- Changer les gains à votre guise. Calculer les équilibres de Nash.

2) X et Y jouent un jeu représenté par la matrice suivante :

$\frac{4}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{0}$
$\frac{4}{0}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{0}{3}$
$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{2}{2}$

Déterminer les équilibres de Nash de ce jeu.

