L2 MASS - Option Théorie des jeux - 2007-08

Corrigé de l'interrogation n° 1

1) Le couple de stratégies (i,j) est un point selle si la valeur en (i,j) est maximale sur la colonne j et minimale sur la ligne i. On voit que $(1,2)$ est le seul point selle pour la matrice de paiement $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et qu'il n'y a pas de point selle pour la matrice de paiement $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2) Matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Comme en 1) on voit qu'il ne peut y avoir de point selle sur la colonne 2.

Le point $(1,1)$ est point selle ssi 1 est minimal dans la ligne 1 et 1 est maximal dans la colonne 1, donc si et seulement si $x = 1$

$(2,1)$ —	x —	2 et x —	1	donc si $1 \leq x \leq 2$
$(1,3)$ —	x —	1 et x —	3	donc si $x \leq 1$ et $x \geq 2$ impossible
$(2,3)$ —	2	2 et 2	3	donc si $2 \leq x$ et $2 \geq x$ ie $x = 2$

Conclusion si $x = 1$, $(1,1)$ et $(2,1)$ sont points selle, la valeur du jeu est 1

si $1 < x < 2$ $(2,1)$ est seul point selle, la valeur du jeu est x

si $x = 2$ $(2,1)$ et $(2,3)$ sont points selle, la valeur du jeu est 2

Il n'y a pas de point selle pour les autres valeurs de x

Remarque : Il y a d'autre façon de procéder : on peut aussi chercher les x tels que $\underbrace{\max(\min(1,x), \min(2,x))}_{\min(2,x)} = \underbrace{\min(\max(1,x), 5, \max(2,x))}_{\min(\max(1,x),5)}$,

la valeur du jeu étant alors cette valeur commune.

3) On regarde la position du maximum de chaque colonne (ce sont les lignes 2 et 5 pour la colonne 1 par exemple) et on regarde pour chacune de ces positions si on minimise la ligne correspondante. La réponse est oui pour la colonne 2 ligne 5, la colonne 3 ligne 5. On obtient ainsi les points selle $(5,2)$ et $(5,3)$. Le jeu admet donc une valeur : la valeur en $(5,2)$ qui vaut 1. On sait que si O_X et O_Y désignent l'ens des stratégies optimales du joueur 1 et du joueur 2, les points selles sont les éléments de $O_X \times O_Y$, donc $O_X = \{5\}$ et $O_Y = \{2,3\}$

4) Une stratégie mixte optimale du joueur 1 est un p-uplet $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p)$ de réel vérifiant $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p \geq 0$, $\bar{x}_1 + \cdots + \bar{x}_p = 1$ et $\inf\limits_{\substack{y_1,\ldots,y_q \geq 0 \\ y_1+\cdots+y_q=1}} \sum\limits_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j$ est égal à la valeur du jeu en stratégie mixte, ou encore est maximal parmi les $\inf\limits_{\substack{y_1,\ldots,y_q \geq 0 \\ y_1+\cdots+y_q=1}} \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i y_j$, $(x_1, \ldots, x_p)$ décrivant Δ_p

Dire qu'il existe un équilibre en stratégie mixte c'est dire qu'il existe un p-uplet $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p) \in \Delta_p$ (où $\Delta_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, x_1, \ldots, x_p \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^p x_i = 1\}$) et un q-uplet $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_q)$ dans Δ_q tels que

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j \text{ est maximal parmi les } \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i \bar{y}_j, \ (x_1, \ldots, x_p) \text{ décrivant } \Delta_p \\ \sum\limits_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i \bar{y}_j \text{ est minimal parmi les } \sum\limits_{i,j} a_{ij} \bar{x}_i y_j, \ (y_1, \ldots, y_q) \text{ décrivant } \Delta_q \end{cases}$$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ La stratégie 2 du joueur 2 est dominée par sa stratégie 1. Le jeu a même valeur en stratégie mixte que le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour lequel la valeur du jeu est 2

$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ On calcule $\sup\limits_{x \in [0,1]} \min\left(x+3(1-x),\ 4x+1-x,\ 3x+2(1-x)\right) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \min\left(3-2x,\ 1+3x,\ 2+x\right)$

L'application $f : x \mapsto \min(3-2x, 1+3x, 2+x)$ est affine sur chacun des intervalles $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{5}]$, $[\frac{2}{5},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$ (on obtient les bornes en décrivant les cas d'égalité entre $3-2x$, $1+3x$ et $2+x$). On a $f(x) = 1+3x$ sur $[0,\frac{2}{5}]$ et $f(x) = 3-2x$ sur $[\frac{2}{5},1]$

On en déduit $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{11}{5}$. C'est la valeur du jeu en stratégie mixte

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ Il est plus simple de calculer l'espérance garantie minimale de dette du joueur 2 :

$$\inf_{y\in[0,1]} \max\left(y+3(1-y),\ 4y+1-y,\ 3y+2(1-y)\right) = \inf_{y\in[0,1]} \max\left(3-2y,\ 1+3y,\ 2+y\right)$$

Soit $g : y \mapsto \max(3-2y, 1+3y, 2+y)$. Comme f, g est affine sur chacun des intervalles $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{5}]$, $[\frac{2}{5},\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2},1]$.

On a $g(y) =$ $3-2y$ sur $[0,\frac{1}{3}]$
$2+y$ sur $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$
$1+3y$ sur $[\frac{1}{2},1]$

On en déduit $\inf\limits_{y\in[0,1]} g(y) = \min\left(3-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{3}$ = valeur du jeu en stratégie mixte.