L2 MASS - Option Théorie des jeux - 2007-08

Corrigé de l'exercice 1 de la feuille 2

) Jeu à deux joueurs à somme nulle de matrice de paiement $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = (u_{i,j})$

On voit qu'il n'y a pas de point selle : On ne trouve pas de couple (i,j) tq $u_{i,j}$ soit le plus grand élément de la colonne j et le plus petit élément de la ligne i. Donc le jeu n'admet pas de valeur en stratégie pure.

La valeur en stratégie mixte est $v = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\geq 0\\ x_1+x_2=1}} \inf\limits_{\substack{y_1,y_2\geq 0\\ y_1+y_2=1}} \sum\limits_{i,j} u_{i,j}\, x_i y_j = \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\geq 0\\ x_1+x_2=1}} \min\left(\sum\limits_i u_{i,1}x_i, \sum\limits_i u_{i2}x_i\right)$

$$= \sup_{0\leq x\leq 1} \min\left(x+2(1-x), 2x+1-x\right) = \sup_{0\leq x\leq 1} \min(2-x, 1+x)$$

L'application $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \min(2-x, 1+x)$ est affine par morceau : On a $2-x = 1+x \iff x = \frac{1}{2}$

$2-x \geq 1+x \iff x \leq \frac{1}{2}$

$2-x \leq 1+x \iff x \geq \frac{1}{2}$

donc $f(x) = 1+x$ sur $[0,\frac{1}{2}]$, $f(x) = 2-x$ sur $[\frac{1}{2},1]$

$\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f(x) = \sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} 1+x = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. De même $\sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} f(x) = \sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} 2-x = \frac{3}{2}$. Enfin $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = \max\left(\sup\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f(x), \sup\limits_{x\in[\frac{1}{2},1]} f(x)\right) = \frac{3}{2}$

Conclusion $v = \frac{3}{2}$

Remarque : on a aussi $v = \inf\limits_{\substack{y_1,y_2\geq 0\\ y_1+y_2=1}} \sup\limits_{\substack{x_1,x_2\geq 0\\ x_1+x_2=1}} \sum\limits_{i,j} u_{i,j}\, x_i y_j = \inf\limits_{0\leq y\leq 1} \max(2-y, 1+y)$ puisque le jeu admet un équilibre en stratégie mixte.

b) Nouvelle matrice de paiement $(v_{i,j}) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ v & v\end{pmatrix}$ avec $v = \frac{3}{2}$. On calcule d'abord la valeur de ce jeu en stratégie mixte en calculant l'espérance minimale garantie de dette du joueur 2 (celle-ci est plus facile à calculer que l'espérance garantie maximale de gain du joueur 1) :

$w = \inf\limits_{0\leq y\leq 1} \max\left(y+2(1-y), 2y+1-y, vy+v(1-y)\right) = \inf\limits_{0\leq y\leq 1} \max(2-y, 1+y, v)$

D'après la remarque ci-dessus on a $\inf\limits_{0\leq y\leq 1} \max(2-y, 1+y) = v$ donc $\forall y\in[0,1],\ \max(2-y,1+y) \geq v$ donc $\forall y\in[0,1],\ \max(2-y,1+y,v) = \max(2-y,1+y)$

~~On~~ $\cancel{\inf\limits_{0\leq y\leq 1}}$ On obtient $w = \inf\limits_{0\leq y\leq 1} \max(2-y, 1+y) = v = \frac{3}{2}$

La stratégie 3 du joueur 1 est une stratégie mixte optimale si elle lui donne comme espérance garantie de gain en stratégie mixte la valeur w donc si $\inf\limits_{y\in[0,1]} (vy + v(1-y)) = w$. Or $\forall y\in[0,1],\ vy+v(1-y) = v$ donc $\inf\limits_{y\in[0,1]} (vy+v(1-y)) = v$. D'autre part $v = w$

) Sachant que le joueur 1 joue sa stratégie 3, le joueur 2 peut jouer indifféremment ses stratégies 1 ou 2 puisque chacune lui donne le même gain $-v$. Cependant aucune n'est prudente en stratégie mixte : par exemple la stratégie 1 du joueur 2 n'est pas prudente car $\max(1,2,v) = 2$ est strictement supérieur à la valeur du jeu en stratégie mixte.

Les stratégies mixtes optimales du joueur 2 sont les couples $(y, 1-y)$ tels que $0 \leq y \leq 1$ et $\max(2-y, 1+y, v) = v$

On a vu $\forall y \in [0,1]$, $\max(2-y, 1+y) \geqslant v$. En étudiant chacune des fonctions $2-y$ et $1+y$ on voit que l'inégalité est stricte sauf si $y = \frac{1}{2}$

Conclusion : le joueur 2 n'a qu'une stratégie mixte optimale qui est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

d) Complément : stratégies mixtes optimales du joueur 1.

On connait la valeur du jeu en stratégies mixte : $\frac{3}{2}$

On cherche les triplets (x_1, x_2, x_3) vérifiant
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \underbrace{\min\left(x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3,\ 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3\right)}_{\text{espérance garantie de gain du joueur 1}} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ce qui équivaut à
$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 \geqslant \frac{3}{2} \\ 2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \geqslant \frac{3}{2} \end{cases}$$

En effet l'une des deux dernières inégalités sera une égalité puisque $\frac{3}{2}$ est l'espérance garantie maximale du joueur 1.

On écrit $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. On cherche donc les (x_1, x_2) vérifiant
$$\begin{cases} x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \geqslant 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$
ce qui équivaut à
$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 \geqslant 0 \\ 2x_1 \leqslant 1 \end{cases}$$

Conclusion : les stratégies optimales du joueur 1 sont les triplets $(x, x, 1-2x)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$

On retrouve pour $x = \frac{1}{2}$ la stratégie pure $(0, 0, 1)$.