Correction exo 4, TD 1

November 29, 2007

On se place dans le contexte general d'un jeu a somme nulle a 2 joueurs. Soit X et Y les ensembles de strategies des joueurs X et Y, $u(x,y)$ la fonction d'utilite du joueur X.

- Prouver que

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} u(x,y) \leq \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} u(x,y) \tag{1}$$

Preuve :
Par la propriete de l'inf et du sup on a :

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \inf_{\tilde{y}\in Y} u(x,\tilde{y}) \leq u(x,y)$$

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad u(x,y) \leq \sup_{\tilde{x}\in X} u(\tilde{x},y)$$

Donc en mettant ensemble les 2 inegalites, on a :

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \inf_{\tilde{y}\in Y} u(x,\tilde{y}) \leq u(x,y) \leq \sup_{\tilde{x}\in X} u(\tilde{x},y)$$

En oubliant le terme $u(x,y)$, puis en prenant le sup sur x puis l'inf sur y on obtient :

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \inf_{\tilde{y}\in Y} u(x,\tilde{y}) \leq \sup_{\tilde{x}\in X} u(\tilde{x},y)$$

$$\forall y \in Y, \quad \sup_{x\in X}\inf_{\tilde{y}\in Y} u(x,\tilde{y}) \leq \sup_{\tilde{x}\in X} u(\tilde{x},y)$$

$$\sup_{x\in X}\inf_{\tilde{y}\in Y} u(x,\tilde{y}) \leq \inf_{y\in Y}\sup_{\tilde{x}\in X} u(\tilde{x},y)$$

- Supposons que l'on dispose d'un couple de strategies $(\tilde{x},\tilde{y})$ tel que

$$u(\tilde{x},\tilde{y}) = \inf_{y\in Y}\sup_{x\in X} u(x,y)$$

Est-ce $\tilde{x}$ qui est une strategie prudente pour X, ou bien $\tilde{y}$ qui est une strategie prudente pour Y ? Et donc pourquoi a-t-on

$$\forall x \in X, \quad u(x,\tilde{y}) \leq u(\tilde{x},\tilde{y})$$

Reponse:
Le joueur a cherche a minimiser sur les strategies de Y l'utilite du pire des cas quand X choisit. Il s'agit donc de Y qui cherche a minimiser l'utilite

de X. Par consequent c'est $\tilde{y}$ qui est une strategie prudente pour Y.
L'utilite de la strategie prudente $\tilde{y}$ de Y est donc $u(\tilde{x}, \tilde{y})$, c'est ce que signifie l'egalite

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

Donc pour la strategie $\tilde{y}$ le pire des cas est quand X joue $\tilde{x}$, cad que l'utilite n'est jamais plus grande que quand X joue $\tilde{x}$. Par consequent

$$\forall x \in X, \quad u(x, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

- Supposons que l'egalite

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

soit realisee en un couple de strategies $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Pourquoi

$$\forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad u(x, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, y)$$

Reponse:
Le couple $(\tilde{x}, \tilde{y})$ verifie l'egalite de la question precedente.

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

On a donc etabli que $\tilde{y}$ est une strategie prudente de Y. De maniere symetrique, on a que $\tilde{x}$ est une strategie prudente de X en raison de l'egalite

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y)$$

Dans la question precedente on a etabli que, du fait que $\tilde{y}$ est une strategie prudente, on a

$$\forall x \in X, \quad u(x, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

De maniere symmetrique, comme $\tilde{x}$ est une strategie prudente de X, et que dans le pire des cas pour X (cad que l'utilite est minimale) Y joue $\tilde{y}$, on obtient l'inegalite

$$\forall y \in Y, \quad u(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq u(\tilde{x}, y)$$

- On suppose maintenant que $u(x, y) = y^2 - x^2 - xy + y - 2x$, que $X = [-3, 3]$ et $Y = [-4, 2]$. Trouver trouver un couple de strategies $(\tilde{x}, \tilde{y})$ qui realise

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) = u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x, y)$$

Reponse:
On va trouver les points $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tel que

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} u(x, y) = u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

On commence par trouver la fonction $I(x) = \inf_{y \in Y} u(x, y)$. Pour ce faire on utilise le fait que les extremums sont atteints quand la derivee s'annule.

$$\partial_y u(x, y) = 2y - x + 1$$

On remarque au passage que la derivee seconde $\partial_y^2 u(x,y) = 2$ est positive, il s'agit donc d'un minimum (ce qui convient vu qu'on calcul un inf). En utilisant la derivee premiere on voit que le minimum est atteint pour $y = \frac{x-1}{2}$ quand le point $(x, \frac{x-1}{2})$ est dans le domaine de definition de l'utilite. Sinon il sera atteint sur les bords. On regarde donc quand ce point sort du bord. On resoud donc les 2 equations :

$$-4 = \frac{x-1}{2} \qquad 2 = \frac{x-1}{2}$$

D'ou $x = -7$ ou $x = 3$. Donc vu que x varie entre -3 et 3 on ne sort jamais du domaine. On en deduit que sur tout $[-3,3]$ on a $I(x) = u(x, \frac{x-1}{2})$. On utilise a nouveau le critere de derivation pour savoir ou l'extremum est atteint.

$$\partial_x I(x) = \partial_x u(x, \frac{x-1}{2}) = -2x - \frac{x-1}{2} - 2 = \frac{-5x-3}{2}$$

La derivee seconde est $\frac{-5}{2}$ qui est negatif, donc l'extremum est une maximum, ce qui va bien vu que l'on cherche un sup. Le maximum est donc atteint en $\tilde{x} = \frac{-3}{5}$ qui est bien dans le domaine $[-3,3]$, d'autre part on a $\tilde{y} = \frac{\tilde{x}-1}{2} = \frac{-4}{5}$.

On va maintenant trouver les points $(\tilde{x}, \tilde{y})$ tel que

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} u(x,y) = u(\tilde{x}, \tilde{y})$$

On commence par trouver la fonction $S(y) = \sup_{x \in X} u(x,y)$. Pour ce faire on utilise le fait que les extremums sont atteints quand la derivee s'annule.

$$\partial_x u(x,y) = -2x - y - 2$$

On remarque au passage que la derivee seconde $\partial_x^2 u(x,y) = -2$ est negative, il s'agit donc d'un maximum (ce qui convient vu qu'on calcul un sup). En utilisant la derivee premiere on voit que le minimum est atteint pour $x = \frac{-y-2}{2}$ quand le point $(\frac{-y-2}{2}, y)$ est dans le domaine de definition de l'utilite. Sinon il sera atteint sur les bords. On regarde donc quand ce point sort du bord. On resoud donc les 2 equations :

$$-3 = \frac{-y-2}{2} \qquad 3 = \frac{-y-2}{2}$$

D'ou $y = 4$ ou $y = -8$. Donc vu que y varie entre -4 et 2 on ne sort jamais du domaine. On en deduit que sur tout $[-4,2]$ on a $S(y) = u(\frac{-y-2}{2}, y)$. On utilise a nouveau le critere de derivation pour savoir ou l'extremum est atteint.

$$\partial_y S(y) = \partial_y u(\frac{y-2}{2}, y) = 2y - \frac{-y-2}{2} + 1 = \frac{5y+4}{2}$$

La derivee seconde est $\frac{5}{2}$ qui est positif, donc l'extremum est une minimum, ce qui va bien vu que l'on cherche un inf. Le minimum est donc atteint en $\tilde{y} = \frac{-4}{5}$ qui est bien dans le domaine $[-3,3]$, d'autre part on a $\tilde{x} = \frac{-\tilde{y}-2}{2} = \frac{-3}{5}$.

Finalement on voit que le point realisant la strategie prudente de X est le meme que celui realisant la strategie prudente de Y. Nous avons donc trouve un point selle.

- Dessiner le graphe de la fonction $u(x, y)$ dans $\mathbf{R}^3$ au dessus de $X \times Y$, dessinez un selle de cheval.
  Idee:
  Les 2 figures se ressemblent...
  Le point selle est exactement la ou on mettrait quelque chose sur la selle si on voulait qu'il tienne en equilibre.