

TD de theorie des jeux 2

September 20, 2007

1 Jeux a 2 parametres

1.1 Les jeux 2x2

On se propose d'étudier l'ensemble des jeux 2x2 possibles. C'est a dire l'ensembles de jeux de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On va distinguer 2 cas.

- Si $a = d$ et $b = c$, on peut soustraire a a toutes les entrees de la matrices et on est ramene a etudier le jeu :

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquez qu'il est inutile d'étudier le jeu pour X et Y, vu qu'il est symetrique pour les 2 partenaires.

- A quelles conditions sur s le jeu admet-il une strategie dominante pour X ?
- Donnez la strategie prudente de X et son utilite en fonction de s .
- Representez les domaines caracterises dans les 2 questions precedentes sur un axe. En deduire le dessin qu'on aurait pour Y. Quand ce jeu a-t-il une valeur ?
- Si $b \neq c$ on peut permuter les strategies x_1 et x_2 de X (ou bien les strategies y_1 et y_2 de Y, ca revient au meme). De cette maniere on se retrouve dans le cas $a \neq d$. Dans ce cas comme l'issue du jeu n'est pas changee par l'addition d'une constante a la fonction d'utilite ni par sa multiplication par un scalaire on peut prendre $a = 0$, $c = 1$ sans perte de generalite. On est donc conduit a etudier le jeu :

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

A nouveau il n'est pas utile d'étudier X et Y vu que en intervertissant la position de s et t on interverti le role de X et Y.

- Donner des conditions necessaires et suffisantes sur s et t pour que X ait une strategie dominante.

- Donner les strategies prudentes de X et leur utilite en fonction de s et t .
- Faire apparaitre sur un dessin les domaines ou x_1 est une strategie dominante, puis prudente de X. Idem pour x_2 . En deduire le dessin pour qu'on aura pour Y. Quand ce jeu a-t-il une valeur ?

1.2 Un autre jeu a 2 parametres

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ s & -2 & 0 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix}$$

- Determiner les strategies prudentes de X et Y en fonction de s et t . Pour ce faire on peut suivre la methode suivante pour X (qu'on pourra transposer a Y) :
 - Ecrire pour X la fonction d'utilite de sa strategie prudente comme un $\max(A, \min(B, s), \min(C, t))$ ou A , B et C sont des constantes que vous determinerez.
 - Eliminer les min inutiles (par exemple si $B < A$ on peut supprimer $\min(B, s)$)
 - Faire un grand tableau a 3 larges lignes, 3 larges colonnes, s en abscisse, t en ordonnee et etudier les differents cas ($s < B$, $s = B$, $s > B$, et pareil pour t). Par exemple si $A < s < B$ et $A < t < C$ on ecrit dans la case en haut a gauche $\max(s, t)$. Subdiviser les cases si necessaire (par exemple pour une case avec $\max(A, s)$ on subdivise la case en 3 colonnes)
 - Finalement faire un dessin reprenant ces informations en marquant dans chaque zone les strategies prudentes et leur utilite.

2 Strategies mixtes

2.1 Un jeu 2x3

Le but est de trouver la strategie mixte optimale de X. La methode algebrique proposee est plutot efficace. Quand elle est applicable (petits nombres entiers typiquement) la methode graphique est la plus rapide et est fiable si le dessin est bien fait.

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Resolution graphique :
Pour chaque strategie de Y, tracer la fonction de p (la probabilite de choisir x_1) qui donne l'utilite esperee de la strategie mixte associee a p . Determiner graphiquement p pour la strategie optimale et son utilite esperee.
- Resolution algebrique :

- Pour chaque strategie de Y (y_1, y_2, y_3) , determiner les fonctions lineaires d_1, d_2, d_3 de la forme $Ap + B$ qui donnent l'utilite esperee de la strategie mixte en fonction de p .
- Calculer les abscisses p_{12}, p_{13}, p_{23} des intersections de ces droites (p_{ij} etant la solution de l'equation $d_i = d_j$).
- Calculer l'utilite esperee pour chacun des p_{ij} precedent.
- Placer les p_{ij} sur une droite. Determiner quelle droite est la plus basse sur chaque intervalle (on peut par exemple evaluer les d_i en des points intermediaires (entre les p_{ij})). En deduire l'utilite de la strategie optimale et la probabilite p associee.

2.2 Une methode pour les jeux 2xn

On explique une methode de resolution pour les jeux 2xn, elle est efficace mais plus obscure. Les 2 jeux donnees en exemple sont la pour s'entrainer en parallele.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -8 & -4 & -11 & 9 & -13 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -11 & 6 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

- On reorganise les colonnes de maniere a avoir une suite croissante sur la premiere ligne. Pour le jeu 1 on a alors :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- On elimine les strategies dominees de Y. En effet le fait de considerer une strategie mixte ne change rien au fait qu'on a toujours aucun interet a choisir une strategie dominee. Le jeu 1 devient :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Apres cette simplification on a forcement une suite decroissante sur la 2eme ligne. Verifier que c'est bien le cas est une maniere efficace de verifier qu'on a bien elimine toutes les strategies dominees. Qu'est-ce que cela signifie graphiquement pour les droites associees a chaque colonne que la premiere ligne croisse et la 2eme decroisse ?

- On verifie que la derniere colonne correspond a une droite decroissante (coefficient du haut plus grand que le coefficient du bas), en effet si elle est croissante elle sont toutes croissantes et la strategie pure x_2 est optimale. De meme si la premiere colonne donne une droite decroissante, la solution optimale est la strategie pure x_1 .
- On fait maintenant quelques calculs preliminaires pour expliquer pourquoi la methode qui suivra marche :
 - Si l'on a 2 droites donnees par $d_1(p) = A(1 - p) + Bp$ et $d_2(p) = C(1 - p) + Dp$, donner les solutions p_1 et p_2 de $d_1 = 0$ et $d_2 = 0$. Calculer $p_1 - p_2$. En supposant que $A > 0, B < 0, C > 0, D < 0$, prouver que $p_1 < p_2$ si et seulement si $AD - BC > 0$.

- Remarquer que l’abscisse de l’intersection entre les 2 droites est la solution de l’équation $d_1 - d_2 = 0$. En supposant que $A < C < E$ et $B > D > F$, en deduire que dans la situation suivante la strategie y_2 est inutile (cad qu’elle a toujours une utilite plus grande que y_1 ou y_3) si et seulement si $(C - A)(F - B) - (E - A)(F - B) < 0$.

$$\begin{pmatrix} A & C & E \\ B & D & F \end{pmatrix}$$

- La methode consiste tout d’abord a soustraire la premiere colonne a toute les suivantes. Pour deux colonnes $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ on dit que la premiere colonne est “superieure” a la deuxieme si $AD - BC > 0$. On cherche ensuite la colonne la plus “grande” dans ce sens. Sur le jeu 1 on obtient

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 9 \\ 7 & -1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Comparons les colonnes 2 et 3 : $(2 \times (-7)) - ((-1) \times 4) = -10 < 0$ donc la 2eme colonne ne sert a rien et on la supprime. On compare donc les colonnes 3 et 4 : $(-32 + 63) > 0$ donc la 3eme colonne est la plus “grande”. Cela signifie la droite $2(1 - p)$ (associee a la colonne 3 dans le tableau originel) est celle qui coupe la droite $-2(1 - p) + 7p$ le plus tot.

- Si la colonne la plus “grande” qu’on vient de trouver donne une droite croissante on recommence l’etape precedente avec cette colonne pour premiere colonne. Si elle est de pente decroissante on s’arrete (on n’ameliore rien en augmentant p) et la probabilite p de la strategie mixte optimale est la solution de l’équation associee a la colonne qu’on vient de trouver.

Dans le jeu 1, la 3eme colonne est associee a une droite de pente negative donc la strategie optimale est obtenue pour p solution de $4(1 - p) - 7p = 0$ (ce qui correspond a prendre la solution de $-2(1 - p) + 7p = 2(1 - p)$). D’ou $p = 4/11$ et l’utilite esperee est $2 \times 7/11 = 14/11$.

2.3 Strategies mixtes d’un jeu 2x2

Comme dans le premier exercice, l’étude generale des jeux 2x2 revient a l’étude des 2 types de jeux suivant (que l’on ait des strategies mixte ne change rien au raisonnement).

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

- Determiner les strategies mixtes optimales de X en fonction de s et t . Les strategies pures sont des cas particuliers de strategies mixtes, il n’y a donc de difference avec le cas pur que si le jeu n’avait pas deja de valeur en strategie pure.
- En reprenant les domaines ou le jeu n’avait pas de valeur en strategie pure, donner sa valeur en strategie mixte en fonction de s et t .