L2 MASS - Option Théorie des jeux 2007-08

TD n°1

ex 1. Soient X, Y deux ensembles et $u : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application. Comparer $\inf_x \sup_y u(x,y)$, $\sup_y \inf_x u(x,y)$, $\inf_y \sup_x u(x,y)$, $\sup_x \inf_y u(x,y)$. Ces valeurs sont elles toujours finies ? atteintes ?

Interprétation en terme de stratégie prudente

ex 2. On pose $X = Y = [0,1]$. Soit $u : X \times Y \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + y - 1$. Calculer $\sup_x \inf_y u(x,y)$ et $\inf_y \sup_x u(x,y)$

Y a t-il un point selle ?

Même question pour $u : (x,y) \mapsto 1 - (x-y)^2$

$$u : (x,y) \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < y \\ 1 - 2y^2 & \text{si } x > y \\ x - y^2 & \text{si } x = y \end{cases}$$

ex 3. Décrire les stratégies prudentes, les points selle éventuels et la valeur correspondante pour les jeux à deux joueurs à somme nulle suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a \in \mathbb{R}$$

ex 4. Construire un jeu à deux joueurs ayant chacun 5 stratégies vérifiant

a) Il n'y a aucun point selle

b) Il y a exactement un point selle

c) Il y a exactement deux points selle

d) Il y a exactement six points selle

* e) Il y a exactement sept points selle

ex 5. « Un père veut donner les étrennes à son fils et lui dit : Je vais mettre un nombre de jetons pair ou impair dans ma main.

Cela fait : - si vous nommez pair et qu'il y a pair dans ma main, je vous donnerai deux écus

- impair pair , vous me donnerez un écu

- pair impair , vous me donnerez un écu

- impair impair , vous aurez un écu »

Modéliser ce jeu par une matrice de paiement. Y a t-il des points selle ? Quelle serait la meilleure stratégie pour le fils ? Et pour le père ?

Ex 6. Deux tas contenant respectivement 3 et 2 bâtonnets sont disposés sur une table. Deux joueurs enlèvent ~~succes~~ l'un après l'autre et de façon répétée un nbre ≥ 1 de bâtonnets provenant d'un seul tas. Le joueur enlevant les derniers bâtonnets gagne. On nomme X le joueur qui commence, Y l'autre joueur. Comment peut on ~~modéliser~~ définir une stratégie de X ou de Y ? Expliciter les stratégies de X et Y et vérifier qu'il y a une stratégie gagnante pour X ou pour Y. Interprétation en terme de point selle d'une fonction de paiement ? Que se passe-t-il si on remplace $(3,2)$ par $(3,3)$? par $(22,7)$? ou si on considère trois tas contenant respectivement 7, 5 et 3 bâtonnets ?