L2Mass Statistique - Examen du 13 mai 2019

Durée 2h. Documents interdits. Justifiez raisonablement chaque réponse

Q.1 On veut estimer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ d'une variable aléatoire X (de loi inconnue) en observant n réalisations indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ de X.

Qu'est ce qu'un estimateur de $\mathrm{E}(X)$? Que signifie l'affirmation que l'estimateur est convergent ?

Pouvez vous proposer un estimateur convergent de $\mathrm{E}(X)$?

Ex.2 On observe une variable aléatoire X dont on sait que la loi admet une densité de la forme $f_a(x) = \frac{4x^3}{a^4}$ pour $x \in [0, a]$, $f_a(x) = 0$ sinon, où a est un nombre réel strictement positif qu'on veut estimer.

a. Construire à partir de la moyenne empirique d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ un estimateur convergent de a. Est il sans biais ?

b. Que pourriez vous proposer comme autre estimateur du paramètre a ?

Ex.3 Une lotterie est organisée pour une bonne cause. 1000 billets sont vendus, pouvant chacun rapporter un lot à son acheteur d'une valeur de 100€ avec une probabilité de $2/100$ indépendamment les uns des autres (comme au loto). Les organisateurs de la lotterie cherchent à fixer le prix c d'un billet.

a. Pour quelles valeurs de c les organisateurs sont ils sûrs de ne pas perdre d'argent à l'issue de la lotterie (en négligeant le coût d'organisation de la lotterie même) ?

b. Pour quelles valeurs de c l'espérance de gain des organisateurs est elle positive ?

c. Pour quelles valeurs de c la probabilité que les organisateurs perdent de l'argent est elle inférieure à $1/100$?

Ex.4 Une machine outil produit des tiges de longueur l (en milimètres, défini par l'opérateur de la machine) avec une erreur sur la longueur ϵ qui suit la loi normale centrée en 0 d'écart type 2, indépendamment de l.

a. Quel est l'intervalle de fluctuation des longueurs au seuil 80% ?

b. Sous l'hypothèse $l = 120$, quelle est la probabilité qu'une tige ait une longueur inférieure à 118 ?

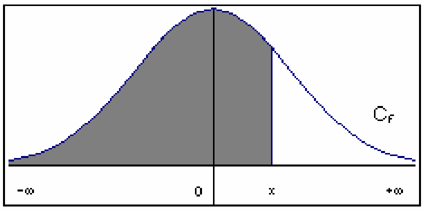
* **c.** Sous la même hypothèse quelle est la probabilité que sur un échantillon de 100 tiges au moins 20 tiges aient une longueur inférieure à 118 (utiliser une approximation gaussienne) ?

Quelle statistique de test pourrait on construire dans cet esprit pour rejeter l'hypothèse $l = 120$?

* **d.** On prélève un échantillon de 100 tiges et on observe que 80 de ces tiges ont une longueur inférieure à 120 ; cela permet il de rejeter l'hypothèse $l = 120$? Par quelle statistique de test ?

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à x)



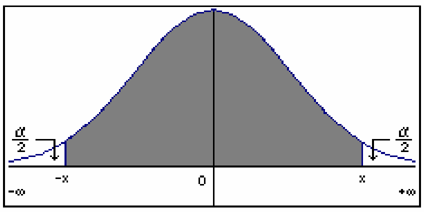
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(x)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

TABLE 2

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
(Recherche de la valeur de x telle que $P(-x \leq X \leq x) = 1 - \alpha$)



α	0,20	0,15	0,10	0,075	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
$1-\alpha$	**0,80**	**0,85**	**0,90**	**0,925**	**0,95**	**0,975**	**0,98**	**0,99**	**0,995**	**0,999**
x	1,282	1,440	1,645	1,780	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291