Université de Nice Sophia-Antipolis — Année Universitaire 2015/2016
L2 MASS — **Statistique**
TD de statistique

Feuille de TD 2

Exercice 1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de loi de Poisson de paramètre θ. On pose $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Donner pour tout $k \geq 0$, $\mathbb{P}(X_1 = k)$.

(2) Parmi les estimateurs suivants, lesquels sont sans biais ? Lesquels sont bons ?

$$\begin{cases} T_1(X_1, \cdots, X_n) = X_1 + X_2, \\ T_2(X_1, \cdots, X_n) = \bar{X}_n, \\ T_3(X_1, \cdots, X_n) = \bar{X}_n - 1/n \end{cases}$$

Exercice 2. Au second tour d'une élection, il reste seulement deux candidats. Monsieur S espère bien détrôner Monsieur H. Pour évaluer ses chances, il effectue un sondage auprès de n personnes (on supposera que l'échantillon est représentatif).

(1) On note p la proportion de gens qui voteront pour Monsieur S et $X_i = 1$ si le i-ème individu s'exprime en faveur de Monsieur S et $X_i = 0$ si il se prononce en faveur de Monsieur H (on élimine le cas de l'abstention). Quelle est la loi de X_1 ?

(2) $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ est-il un bon estimateur de p ?

(3) Donner la loi de $n\bar{X}_n$.

Exercice 3. Les individus d'une population possèdent un caractère X qui suit une loi de probabilité dont la densité est donnée par $f_\theta(x) = kx^2/\theta^3$ pour $x \in [0, \theta]$ et $f_\theta(x) = 0$ sinon. On s'intéresse au paramètre $\theta > 0$. A des fins statistiques, on dispose de l'échantillon suivant :

1.05	0.92	1.95	1.85	1.99	1.60	1.87	1.63	0.81	0.56

(1) Déterminer la constante k pour que f_θ soit une densité.

(2) On se donne $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de même loi que X. Montrer que la moyenne $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ n'est pas un estimateur sans biais de θ.

(3) En déduire un estimateur sans biais de θ. Utiliser le tableau de valeurs pour donner une estimation de θ.

(4) L'échantillon suivant est également à notre disposition :

1.87	1.93	1.64	1.35	1.44	1.69	0.73	1.89	1.66	1.81

Que donne la nouvelle estimation de θ ?

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire de densité donnée par $f_b(x) = 4x^3/b^4$ pour $x \in [0, b]$ et $f_b(x) = 0$ sinon. Calculer un estimateur de b par la méthode des moments.

Exercice 5. On suppose que la durée de fonctionnement d'un micro-ondes suit une loi sans mémoire de moyenne $1/\lambda$. On souhaite estimer la loi de la durée de fonctionnement d'un micro-ondes. Pour ce faire on dispose de $n \geq 1$ "cadavres" de micro-ondes dont on connaît la durée de fonctionnement. On supposera qu'elles sont indépendantes d'un micro-onde à l'autre.

(1) On note X_i la durée de fonctionnement du i-ème micro-onde. Quelle est la loi de X_i ?

(2) Donner un estimateur de λ par méthode des moments.

(3) Donner un estimateur de λ par maximum de vraisemblance.

(4) Montrer que ces estimateurs sont consistants.

Exercice 6. Un touriste se rend au casino. Là bas, on lui propose de jouer au jeu suivant : "Le jeu consiste en n étapes. A chaque étape, une pièce est lancée. Si elle tombe sur pile, on lui donne 2 euros. Si elle tombe sur face, il devra payer 1 euro."

(1) Modéliser le problème à l'aide de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p et de la fonction f telle que : $f(0) = -1$, $f(1) = 2$. Que représente p ? On note G_n le gain du joueur après les n lancers.

(2) Après réflexion, le touriste décide d'accepter le jeux : si la pièce n'est pas déséquilibrée, il est persuadé de l'emporter. Expliquer pourquoi en calculant une espérance.

(3) Au bout de 100 lancers ($n = 100$), le touriste a un gain de 10 euros. En rentrant à son hôtel, il décide de savoir si la pièce était déséquilibrée. Proposer un bon estimateur de p. Que donne l'estimation de p ?

(4) En reprenant les résultats de la question (2), donner le paramètre p pour que le jeu soit équitable.

Exercice 7. Un étang contient un nombre inconnu $N \geq 1$ de poissons. Pour déterminer N on effectue une première pêche qui amène $r \geq 1$ poissons que l'on marque, puis que l'on relâche. On effectue ensuite une deuxième pêche qui amène $n \geq 1$ poissons, parmi lesquels on trouve $k \geq 0$ poissons marqués.

(1) Quelles sont les quantités aléatoires ? Lesquelles sont connues ? Quelle est la quantité que l'on souhaite estimer ?

Dans les questions (2) à (5), on supposera que la deuxième pêche est constituée de poissons différents entre eux (tirage sans remise).

(2) Quel est le nombre minimal $N_{\min}$ de poissons dans l'étang ?

(3) Quelle est la probabilité $p(k, N)$ que la deuxième pêche ait amené exactement k poissons marqués ?

(4) Pour $N > N_{\min}$, calculer $p(k, N)/p(k, N-1)$. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de N.

(5) **Application numérique :** On suppose que $n = r = 1000$ et $k = 100$. Que donnent les réponses aux questions (2) et (4) ?

Dans la suite, on supposera que la deuxième pèche se déroule de la manière suivante : on pêche le premier poisson, on vérifie si il est marqué puis on le relâche. On fait de même pour le deuxième poisson et ainsi de suite jusqu'à en avoir péché n (tirages successifs avec remise).

(6) Quelle est la probabilité $q(k, N)$ que la deuxième pêche ait amené exactement k poissons marqués ?

(7) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de N.

Exercice 8. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi uniforme $\mathcal{U}([0, \theta])$.

(1) Représenter le graphe de la densité de X_1. Rappeler $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathrm{X}_1)$.

(2) En tant qu'estimateur de θ, quel est le biais de $\bar{X}_n$? Quelle est la variance de $\bar{X}_n$? En déduire un bon estimateur de θ.

(3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. On le notera B_{MV}.

(4) Calculer la fonction de répartition de B_{MV}. En déduire sa densité, son espérance et sa variance.

(5) En déduire un bon estimateur B de θ.

(6) Et si vous deviez choisir entre le bon estimateur trouvé à la question 2 et celui trouvé à la question 5 ?

Exercice 9. Soient $\gamma \in]0,1[$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées à valeur dans $\{-1,0,1\}$ telle que $\mathbb{P}\left(X_1 = -1\right) = \gamma(1-\gamma)$ et $\mathbb{P}\left(X_1 = 0\right) = \gamma^2$.

(1) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1^2]$ en fonction de γ.

(2) Inverser sur $]0,1[$ les fonctions $g_1 : x \mapsto (1-x)^2$ et $g_2 : x \mapsto 1-x^2$. En déduire deux estimateurs de γ par la méthode des moments.

(3) Pour j dans $\{-1,0,1\}$, on note $S_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i=j}$. Exprimer l'estimateur par maximum de vraisemblance de γ en fonction de S_{-1}, S_0 et S_1.