INSTITUT SUPÉRIEUR D' ÉCONOMIE ET DE MANAGEMENT
Université de Nice-Sophia Antipolis

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2013-2014 **REF.**
ANNÉE D'ÉTUDE : L2
MATIÈRE : PROBABILITÉS, STATISTIQUES
ENSEIGNANT : Julien BARRÉ
THÈME DE LA SÉANCE : Echantillonage, loi des grands nombres, thérorème central limite.

Fiche TD 4 - L2 Économie-Gestion

Exercice 1 :
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées. On note $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X)$. On note $\bar{X}$ la moyenne empirique des X_i : $\bar{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$
a. Que vaut $E(\bar{X})$?
b. Que vaut la variance de $\bar{X}$?

Exercice 2 :
Une entreprise produit des boîtes de haricots verts. En moyenne, le poids net d'une boîte est 560g, avec un écart-type de 10g. Calculer l'espérance et l'écart-type de la moyenne empirique des poids nets dans un échantillon de 100 boîtes. Quelle est la loi approchée de cette moyenne empirique ?

Exercice 3 :
Je prends un bus 240 fois dans l'année. On peut considérer que les temps d'attente sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Je sais que le temps moyen d'attente est de 5 minutes. Je sais de plus que le temps d'attente d'un bus suit une loi exponentielle.

Quelle est le paramètre cette loi exponentielle ? Puis-je évaluer la probabilité que mon temps d'attente total sur une année soit inférieur à 19h ?

Exercice 4 :
Les X_i sont des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{U}([1,3])$. On définit $S = X_1 + \ldots + X_{100}$. Estimer la probabilité que S soit plus grande que 215.

Exercice 5 :
On lance un dé équilibré 3000 fois. On s'intéresse à la v.a. N qui compte le nombre de résultats supérieurs ou égaux à 5.
a. En utilisant la loi des grands nombres, de quel nombre $N/3000$ devrait être proche ?
b. Quel est l'écart-type de N ?
c. En utilisant le TCL : quelle est la probabilité que N soit plus grand que 1030 ? Compris entre 950 et 1050 ?

Exercice 6 (exercice d'examen)
La proportion d'entreprises cessant leur activité pour raison économique dans les 5 ans après leur création est de 38% (chiffre 2004). On suppose que cette proportion sera la même entre 2013 et 2018.
a. On considère une entreprise créée en 2013, et on note X_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si l'entreprise cesse son activité pour raison économique avant 2018, et 0 si ce n'est pas le cas. Comment s'appelle la loi de cette variable aléatoire ?
Pour les questions **b, c, d**, on considère un échantillon aléatoire de 1000 entreprises créées en 2013. On note N la va qui compte le nombre d'entreprises qui cesseront leur activité pour raison économique dans les 5 ans.
b. Quelle est la loi de N ? Quelle est l'espérance de N ? Sa variance ?
c. Par quelle loi de probabilité peut-on approximer la loi de N ?
d. Quelle est la probabilité que plus de 500 entreprises dans l'échantillon cessent leur activité pour raison économique ? Quelle est la probabilté que moins de 300 entreprises dans l'échantillon cessent leur activité pour raison économique ?

Exercice 7 :
120 personnes se font rembourser par une compagnie d'assurance. La somme versée à chacun est en moyenne 50 euros, avec un écart-type de 30 euros. On suppose que ces sommes sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées. Déterminer la probabilité pour que 6500 euros suffisent à effectuer tous les remboursements.

Exercice 8 :
Une compagnie d'assurance assure n personnes contre un même risque, de probabilité p. Si ce risque se réalise, la compagnie doit payer à l'assuré la somme M. La cotisation de chaque assuré est $M(p+a)$. On suppose que les sinistres sont indépendants.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par le bénéfice de la compagnie ? (ce bénéfice peut être positif ou négatif).
b. Déterminer, en fonction de n et p, la valeur de a pour que la compagnie ait une probabilité 0.001 de perdre de l'argent.
c. Les assurés ont-ils intérêt à être nombreux ?

Exercice 9 :
Le temps moyen passé par une personne devant sa télévision est de 15h par semaine, avec un écart-type de 4h. Un échantillon de 60 personnes est sélectionné.
a. Quelle est la probabilité pour que la moyenne d'échantillon s'écarte de au plus 1h de la moyenne de la population ?
b. Quelle est la probabilité pour que la moyenne d'échantillon surestime de plus de 45mn la moyenne de la population ?

Références : Anderson-Sweeney-Williams, Fourastié-Laslier, Lecoutre.