

Durée deux heures ; documents et matériel électronique interdits

*Expliquez soigneusement vos réponses*

1. Quelles sont les solutions définies sur  $]0, +\infty[$  de l'équation différentielle

$$xy' - y = x \quad ?$$

2. Quelles sont les solutions définies sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} \quad ?$$

3. Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le disque de centre  $(0, 0)$  de rayon 1 ; soit  $f$  l'application  $D \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x, y) = e^{xy} .$$

- \*a. Expliquez pourquoi l'application  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $D$ .

- b. Calculer  $\max_{(x,y) \in D} f(x, y)$  en précisant les points de  $D$  où ce max est atteint.

4. Soit  $f$  l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x, y) = (x - y)^2 .$$

- a. Donner un développement limité à l'ordre 2 en  $(1, 0)$  de  $f$ .

- b. La fonction  $f$  admet-elle un extremum local en  $(1, 0)$  ?

- c. Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $(1, -1)$  de rayon 1. La restriction de  $f$  à  $\mathcal{C}$  admet-elle un extremum local au point  $(1, 0) \in \mathcal{C}$  ?

- d. Soit  $D$  la droite passant par  $(1, 0)$  de vecteur directeur  $(1, 1)$ . En quel point de  $D$  la restriction de  $f$  à  $D$  admet-elle un extremum global ? (Utilisez un paramétrage de  $D$ .)

5. Soit  $A$  la partie de  $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y^2 < x < y\} .$$

- a. Dessiner la partie  $A$  dans un repère orthonormé du plan.

- b. Calculer les intégrales  $\int_A x \, dx \, dy$  et  $\int_A y \, dx \, dy$ .