

0. Donner un développement limité à l'ordre 1,2 puis 6 de $p(x) = x^2 + x$ en $x = 0$ puis en $x = 2$.

1. Soient f, g des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d'}$ munis de normes $\| \cdot \|$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est un grand O de g en x_0 et on écrit $f(x) = O_{x \rightarrow x_0}(g(x))$ ou $f = O_{x_0}(g)$ s'il existe une constante $A > 0$ telle que $\|f(x)\| \leq A\|g(x)\|$ au voisinage de x_0 .

Montrer que $\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$ et $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$, vues comme fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sont des grand O l'un de l'autre en tout point.

Montrer que l'expression $x + y^2$ en un grand O de $\|(x, y)\|_\infty$ en $(0, 0)$ mais que le quotient $\frac{x+y^2}{\|(x, y)\|_\infty}$ n'est pas borné sur $\mathbb{R}^2$ entier. A t-on la relation $\|(x, y)\|_\infty = O_{(0,0)}(x + y^2)$?

En déduire qu'un petit o de $x + y^2$ en $(0, 0)$ est un $o_{(0,0)}(\|(x, y)\|_\infty)$.

2. [Sans utiliser les dérivées partielles] Donner un développement limité des fonctions suivantes :

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+y(1+z)}} \text{ à l'ordre 1 en } (3, 3, 5),$$

$$g(x, y) = x^y \text{ à l'ordre 2 en } (1, 0),$$

$$h(x, y) = \sin(x + y^2) \text{ à l'ordre 2 en } (0, 0).$$

3. [Sans utiliser les dérivées partielles] Calculer le gradient et la hessienne en (x, y) de la fonction $f(x, y) = \sin(x + y^2)$. En quel point le gradient de f est-il nul ?

*Donner un tel point où f admet un point selle. Donner un tel point où f admet un maximum local.

4. Variation de la constante

a. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ b(x) & d(x) \end{pmatrix}$ et $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 , respectivement un vecteur colonne, dont les coefficients sont des fonctions de x , $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables. En écrivant les développements limités en x à l'ordre 1, calculer la dérivée du produit matriciel $\frac{d}{dx}(A(x)Y(x))$.

b. On considère l'équation différentielle vectorielle

$$(E) \quad Y'(x) + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 - x \end{pmatrix}.$$

En trigonalisant la matrice devant $Y(x)$, trouver deux solutions non proportionnelles Y_1, Y_2 de l'équation homogène.

c. Soit $\Phi(x)$ la matrice 2×2 dont les colonnes sont $Y_1(x)$ et $Y_2(x)$. Observer que si $u(x), v(x)$ sont deux fonctions de x dérivables vérifiant $\Phi(x) \begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + x \\ 1 - x \end{pmatrix}$ alors $\Phi(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ est solution de (E).

Quelles sont les solutions de (E) ?

d. On considère l'équation différentielle scalaire (E) $y'' - 2y' + y = xe^x$ et l'équation vectorielle

$$(E') \quad Y'(x) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}.$$

Observer que les solutions de (E') sont exactement les vecteurs colonne $\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ avec $y(x)$ solution de (E).

Quelles sont les solutions de (E) ?

Courbure et cinématique

5. $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire usuel $(-|-)$ et de la norme associée $\| \cdot \|$.

a. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction deux fois dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose $f(t_0) \neq 0$. Donner un développement à l'ordre 2 de $\|f(t)\|^2$ au voisinage de t_0 en fonction de $f(t_0), f'(t_0), f''(t_0)$ et $t - t_0$. En déduire un développement

à l'ordre 2 de $\|f(t)\|$. (Une méthode : si $\|f(t_0 + h)\| = a + bh + ch^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$ alors $\|f(t_0 + h)\|^2 = a^2 + 2abh + (2ac + b^2)h^2 + o(h^2)$; il reste à identifier les coefficients.)

b. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère un chemin $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux fois dérivable en $t_0 \in I$ et $\mathbb{C}$ un cercle de centre un point A , de rayon $r > 0$ passant par $\gamma(t_0)$.

Donner un développement à l'ordre 2 de la distance du point $\gamma(t)$ au cercle $\mathcal{C}$ au voisinage de $t = t_0$.

c. On suppose $\gamma'(t_0) \neq 0$. Observer que le terme d'ordre 1 est nul ssi le cercle est tangent à la courbe paramétrée par γ en $\gamma(t_0)$.

d. En supposant $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ non proportionnels, trouver le point A tel que le cercle de centre A passant par $\gamma(t_0)$ réalise un contact d'ordre 2 avec la courbe paramétrée par γ en $\gamma(t_0)$.

Le rayon r du cercle en question est appelé rayon de courbure de la courbe γ en $\gamma(t_0)$.

e. Exemple : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Calculer le rayon de courbure r en t_0 .

***f.** Exemple : $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ (à valeur dans $\mathbb{R}^3$!) Peut on encore calculer le rayon de courbure de γ en t_0 ?

***g.** Application à la cinématique : On suppose toujours $\gamma'(t_0)$ et $\gamma''(t_0)$ non proportionnels. On note $\vec{T}$ le vecteur (unitaire) $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ et $\vec{N}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}$, dans le même plan que $\gamma'(t_0)$, $\gamma''(t_0)$ et tel que $(\vec{N} | \gamma''(t_0)) > 0$.

Observer que l'accélération $\gamma''(t_0)$ s'écrit $\frac{dv}{dt}(t=t_0)\vec{T} + \frac{v^2}{r}\vec{N}$, où v est la vitesse $\|\gamma'(t_0)\|$.

Le terme $\frac{v^2}{r}\vec{N}$ est l'"accélération centripète" de γ en t_0 .

6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction donnée par $f(x, y, z) = (x + y^2, xy^2z)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction donnée par $g(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$.

a. Calculer les matrices jacobienes de f , g et de la composée $f \circ g$.

b. Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin passant par le point $(1, 1)$ en $t = 0$ et de dérivée $(-1, 2)$ en $t = 0$. Calculer la dérivée en $t = 0$ du chemin $t \mapsto f(g(\gamma(t)))$.

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2)$.

a. Dans un même repère tracer les courbes où f s'annule et indiquer le signe de $f(x, y)$ suivant la position de (x, y) . f admet elle un minimum local ou un maximum local en $(0, 0)$?

b. Déterminer les points critiques de f et donner un développement limité à l'ordre 2 de f en ces points critiques. Est il compatible avec la conclusion de la question (a) ?

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x + y)^3 + 3xy$.

a. Déterminer les points critiques de f . Parmi ces points, lesquels sont des extrema locaux ?

La fonction f admet elle un maximum global ou un minimum global sur $\mathbb{R}^2$?

b. On considère la partie $A = [0, 1] \times [0, 1]$ de $\mathbb{R}^2$. Expliquer pourquoi la restriction de f à A admet un maximum et un minimum.

En étudiant f sur le bord de A , calculer ce maximum et ce minimum.

9. Calculer la distance dans $\mathbb{R}^2$ du point $(0, 0)$ à la courbe d'équation $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 10$.

10. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = xy + yz$. Calculer le minimum de la restriction de f à la sphère de centre $(0, 0, 0)$ de rayon 1.