

1 Recherche

D'abord solution de $xy' - y = 0$ (E_0): on voit tout de suite que $y(x) = x$ est solution

ou bien x où y ne s'annule pas
sur les intervalles où

$$y(E_0) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln(|y|) = \ln(x) + c \quad (x > 0) \quad (x \in]0, +\infty[)$$

$$\Rightarrow |y| = x e^c$$

$$\Rightarrow y = e^c x \text{ ou } y = -e^c x$$

Ensuite variation de la constante: on sur $]0, +\infty[$ on peut écrire $y(x) = z(x) x$ puisque x ne s'annule pas

$$\text{d'où } y'(x) = z'(x) x + z(x)$$

$$xy' - y = x^2 z'(x)$$

$$xy' - y = x \Rightarrow x^2 z' = x \Rightarrow z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln(x) + c \quad (\text{car } x \in]0, +\infty[)$$

Conclusion: les solutions de (E) sont $y(x) = x \ln(x) + c x$ avec $c \in \mathbb{R}$
sur $]0, +\infty[$

2. (E) $y'' + 2y' + y = x e^{-x}$

D'abord solutions de (E_0): $y'' + 2y' + y = 0$

On cherche une solution de la forme $y(x) = e^{dx}$ avec $d \in \mathbb{C}$ car y sol. de (E) $\Leftrightarrow d^2 + 2d + 1 = 0 \Leftrightarrow d = -1$
 $x \mapsto e^{-x}$

Variation de la constante: on écrit $y(x) = z(x) e^{-x}$, toujours possible puisque $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas

$$y' = z' e^{-x} - z e^{-x}, \quad y'' = z'' e^{-x} - 2z' e^{-x} + z e^{-x}$$

$$y'' + 2y' + y = z'' e^{-x}$$

$$y \text{ sol de } (E) \Rightarrow z'' e^{-x} = x e^{-x} \Rightarrow z'' = x \Rightarrow z' = \frac{x^2}{2} + a \Rightarrow z = \frac{x^3}{6} + ax + b \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Conclusion les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = \left(\frac{x^3}{6} + ax + b\right) e^{-x}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

3a f est C^0 sur D par partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$

3b $\max_{(x,y) \in D} f(x,y)$ est atteint en un pt (x_0, y_0) intérieur de D car $x_0^2 + y_0^2 < 1$ ou sur le bord de D

Si le max est atteint en (x_0, y_0) à l'intérieur de D on doit avoir $\text{grad } f_{(x_0, y_0)} = (0, 0)$ car $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$$\text{Or } \frac{\partial e^{2y}}{\partial x} = y e^{2y} \text{ nul seulement si } y = 0$$

$$\frac{\partial e^{2y}}{\partial y} = x e^{2y} \text{ nul seulement si } x = 0 \quad \text{donc on doit avoir } (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$e^{0 \cdot 0} = 1 < e^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \quad \text{car exp est croissante. } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D \quad \text{donc } f \text{ n'est pas maximale en } (0, 0)$$

[On peut aussi étudier la matrice hessienne de f en $(0, 0)$ et montrer qu'elle est de déterminant < 0 donc pas d'ext. local en $(0, 0)$

$$\text{Mat}(Hf_{(0,0)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion f atteint son max sur le bord de D = cercle de centre $(0,0)$ de rayon 1

équation de ∂D : $x^2 + y^2 - 1 = 0$ posons $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ $\text{grad } g|_{\partial D} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right) = (2x, 2y) \neq (0,0)$ si $(x,y) \in \partial D$

si f est maximal en $(x_0, y_0) \in \partial D$ on doit avoir $\text{grad } f$ proportionnel à $\text{grad } g(x_0, y_0)$ i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad (y_0 e^{x_0 y_0}, x_0 e^{x_0 y_0}) = \lambda (2x_0, 2y_0)$
 $\exists p \in \mathbb{R} \quad (y_0, x_0) = p (x_0, y_0)$

mais alors $y_0 = p x_0 = p^2 y_0$ et $x_0 = p^2 y_0$ et comme $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ car $(x_0, y_0) \in \partial D$ on a $p^2 = 1$ donc $p = \pm 1$ puis $y_0 = x_0$ ou $y_0 = -x_0$

sur ∂D les seuls (x_0, y_0) vérifiant cette condition sont $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

comme $\exp$ est $\nearrow$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) < \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$, le max est forcément atteint en $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ et vaut $\exp(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = \exp(\frac{1}{2}) = \sqrt{e}$

[Autre méthode: on paramétrise ∂D par $(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et on étudie $\theta \mapsto \exp(\cos \theta \sin \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$

on a $\cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ maximal pour $\frac{1}{2}$ atteint pour $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\exp$ est strict croissant donc $\exp(\frac{1}{2} \sin 2\theta)$ et max $(=) \frac{1}{2} \sin 2\theta$ et max

on obtient

conclusion $\max_{(x,y) \in \partial D} \exp(xy) = \exp(\frac{1}{2})$ atteint pour $(x,y) = (\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi), \sin(\frac{\pi}{4} + k\pi)) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ si k pair
 $= (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ si k impair

4a $f(x,y) = (x-y)^2$ $f(1+h, k) = (1+h-k)^2 = 1 + 2(h-k) + (h-k)^2 = 1 + 2h + -2k + h^2 - 2hk + k^2$

b $\text{grad } f_{(1,0)} = (2, -2) \neq (0,0)$ donc f n'a pas d'extr. local en $(1,0)$

c E a pour équation $\frac{(x^2-1)^2 + (y+1)^2}{g(x,y)} - 1 = 0$ so $f|_E$ admet un extr. local en $(1,0)$ on doit avoir $\text{grad } f|_{(1,0)} = (2, -2)$ proportionnel à $\text{grad } g_{(1,0)} = (2(2-1), 2(y+1))_{(x=1, y=0)} = (0, 1)$. Ce n'est pas le cas donc non

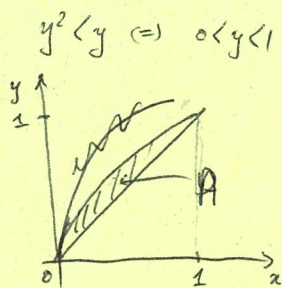
[Autre méthode: paramétrisation de E : $(x(\theta), y(\theta)) = (1+\cos \theta, -1+\sin \theta)$

$f(x(\theta), y(\theta))$ admet un extr. local en $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d}{d\theta} f(x(\theta), y(\theta))|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$ $\frac{d}{d\theta} f(x(\theta), y(\theta)) = \frac{d}{d\theta} (2 + \cos \theta - \sin \theta)^2 = 2(-\sin \theta - \cos \theta)(\cos \theta - \sin \theta)$
 $= 2 \times (-1) \times (-1)$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

d paramétrage de D : $(x(\lambda), y(\lambda)) = (1,0) + \lambda(1,1) = (1+\lambda, \lambda)$

$f(x(\lambda), y(\lambda)) = 1 \rightarrow$ extremum en tout $\lambda \in \mathbb{R}$ donc extremum de $f|_D$ en tout $p \in D$

5



$$\int_A x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y x \, dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{2} \right] dy = \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} =$$

$$\int_A y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y y \, dx \right) dy = \int_0^1 y(y - y^2) \, dy = \int_0^1 (y^2 - y^3) \, dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$