

1a. En $(0, 1)$ $x = h, y = 1+k$ $f(x, y) = (h - (1+k)^2)^2 = (-1 + h - 2k - k^2)^2 = +1 - 2h + 4k + 2k^2 + (h - 2k - k^2)^2$

$$= 1 - 2h + 4k + 2k^2 + h^2 - 4hk + 4k^2 + o_{(0,0)}(hk) + o_{(0,0)}(k^2)$$

$$= 1 - 2h + 4k + h^2 - 4hk + 6k^2 + o_{(0,0)}(\|(h, k)\|^2)$$

Ou bien $f(x, y) = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y-1) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1)(x-0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 1)(x-0)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 1)(y-1)^2 \right] + o_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}}(\|(x, y)\|)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y^2) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy + 2(x - y^2) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2(x - y^2)) = 2 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = 2$$

etc.

1b. f n'admet pas d'extremum local en $(0, 1)$ puisque les dérivées partielles de f en $(0, 1)$ sont $\neq 0$

1c. On paramétrise la droite passant par $(0, 1)$ de vecteur directeur $(2, 1)$ par $M(t) = (0, 1) + t(2, 1) = (2t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$f(\pi(t)) = f(2t, 1+t) = 1 - 2(2t) + 4t + (2t)^2 - 4(2t)t + 6t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \text{ d'après 1a appliqué à } h=2t \text{ et } k=t$$

$$= 1 + 2t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

Comme $t^2(2 + o_{t \rightarrow 0}(1)) \geq 0$ pour t proche de 0, $f(\pi(t)) \geq f(\pi(0)) = 1$ pour t proche de 0 donc $f(\pi(t))$ admet un minimum local en $t=0$. Autrement dit la restriction de f à la droite admet un min local en $\pi(0) = (0, 1)$.

1d. On calcule $f(\pi(t)) = f(2t, 1+t) = (2t - (1+t)^2)^2 = (-1 - t^2)^2 = (1 + t^2)^2$

$1 + t^2$ est positif et atteint son minimum en $t=0$ donc $(1 + t^2)^2$ atteint son min en $t=0$ donc $\pi(0) = (0, 1)$ est un point (est le point) où la restriction de f à la droite admet un min global.

Rq: Ceci répond également à 1c.

2a. $x^2 + xy = (x+y)x$ et x tend vers 0 quand $x, y \rightarrow 0$ donc $x^2 + xy = o_{x, y \rightarrow 0}(x+y)$

2b. Si on a $x + y^2 = o_{x, y \rightarrow 0}(x+y)$ s'il existe une fonction $\varepsilon(x, y)$ définie au voisinage de $(0, 0)$ tendant vers 0 en $(0, 0)$ et telle que $x + y^2 = (x+y)\varepsilon(x, y)$. En prenant $y = -x$, x proche de 0, on obtient $x + x^2 = 0 \times \varepsilon(x, y) = 0$ ce qui n'est pas vrai pour x proche de 0, $x \neq 0$ donc $x + y^2 \neq o_{x, y \rightarrow 0}(x+y)$

Dit autrement, $\frac{x + y^2}{x+y}$ ne tend pas vers 0 quand $x, y \rightarrow 0$

3a. $f(x, y) = (1 + \sin x)(1 + \sin y)$. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x (1 + \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + \sin x) \cos y$

(x, y) est un point critique si $\cos x (1 + \sin y) = 0$ et $(1 + \sin x) \cos y = 0$

On observe $1 + \sin y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$ et alors $\cos y = 0$. De même pour $1 + \sin x = 0$. On distingue donc 3 cas pour l'annulation des deux dérivées partielles :

(1) $y = -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$

(2) $x = -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$

(3) $x, y \neq -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$ et $\cos x = 0$ et $\cos y = 0$ ce qui équivaut à x et $y = \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi$

Pour y et z quelconque on a $f(x+h, y+k) = (1+\sin(x+h))(1+\sin(y+k))$

le développement de Taylor de $x \mapsto \sin(x)$ en x donne $\sin(x+h) = \sin(x) + \cos(x)h - \frac{\sin(x)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)$
de même pour $\sin(y+k)$. On obtient:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= \left(1+\sin(x) + \cos(x)h - \frac{\sin(x)}{2}h^2 + o_{h \rightarrow 0}(h^2)\right) \left(1+\sin(y) + \cos(y)k - \frac{\sin(y)}{2}k^2 + o_{k \rightarrow 0}(k^2)\right) \\ &= (1+\sin(x))(1+\sin(y)) + (1+\sin(y))\cos(x)h + (1+\sin(x))\cos(y)k + \cos(x)\cos(y)hk - (1+\sin(y))\frac{\sin(x)}{2}h^2 \\ &\quad - (1+\sin(x))\frac{\sin(y)}{2}k^2 + o_{h,k \rightarrow 0}(h^2) + o_{h,k \rightarrow 0}(k^2) \end{aligned}$$

Si $y = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ et z quelconque (cas (1)) alors $f(x+h, y+k) = \frac{1+\sin(x)}{2}h^2 + o_{h,k \rightarrow 0}(\|(h,k)\|^2)$

Si $x = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ et y quelconque (cas (2)) alors $f(x+h, y+k) = \frac{1+\sin(y)}{2}h^2 + o_{h,k \rightarrow 0}(\|(h,k)\|^2)$

Si x et $y = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ alors $f(x)$ (cas (3)) alors $f(x+h, y+k) = 4 - h^2 - k^2 + o_{h,k \rightarrow 0}(\|(h,k)\|^2)$

3b. On a $H_f(x,y)(h,k) = 2\cos(x)\cos(y)hk - (1+\sin(y))\frac{\sin(x)}{2}h^2 - (1+\sin(x))\sin(y)k^2$ d'après le DL calculé en 3a
de sorte que la matrice hessienne est $\begin{pmatrix} -(1+\sin(y))\sin(x) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -(1+\sin(x))\sin(y) \end{pmatrix}$

Ou bien $\text{Hess}(H_f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \dots$

Dans le cas (1) $y = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ la matrice hessienne est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\sin(x) \end{pmatrix}$ de déterminant nulle donc ne permet pas de conclure à l'existence d'un extremum local

Egalement: $H_f(x,y)(h,k) = \frac{1+\sin(x)}{2}h^2$ s'annule hors de $(0,0)$ donc on ne peut pas conclure.
et ne change pas de signe

Idem pour le cas (2)

Dans le cas (3) $x = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi, y = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ la matrice hessienne est $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ de déterminant > 0 donc on peut conclure à l'existence d'un extremum. Le 1er coefficient -2 est < 0 donc c'est un maximum local.

Ou bien $H_f(x,y)(h,k) = -(h^2 + k^2) < 0$ si $(h,k) \neq (0,0)$ donc c'est un maximum local.

3c-d f admet un min ou un max local ou global en (x_0, y_0) si $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant au voisinage de (x_0, y_0) ou sur $\mathbb{R}^2$ entier. On doit avoir (x_0, y_0) pt critique donc être dans le cas (1), (2) ou (3) de 3a

Dans les cas (1) ou (2) on a $f(x_0, y_0) = 0$. Or $\sin(-)$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ donc $f(x,y) \geq 0$ donc f admet un minimum global en (x_0, y_0)

Dans le cas (3) on a $f(x_0, y_0) = 4$. Or $\sin(x), \sin(y) \leq 1$ donc $f(x,y) \leq 4$ donc f admet un maximum global en (x_0, y_0)