

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

- (1) $\iint_A x^2 dx dy$, où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 < y < x\}$,
- (2) $\iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, où $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x + y > 0, x - y > 0 \text{ et } 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 2. Soit $H > 0$ et $f : [0, H] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est donné par le graphe de f tournant autour de l'axe (Oz) , c'est-à-dire

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad 0 < z < H \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 < f(z)^2\}.$$

- (1) Faire un dessin.
- (2) Donner une formule pour le volume de D .
- (3) En déduire le volume d'un tonneau à section circulaire de rayon r en bas et en haut, R à mi-hauteur, et de hauteur H (on supposera que le graphe du profil du tonneau est donné par une parabole).
- (4) Une partie du vin contenu dans le tonneau posé debout a été bue. Il reste une hauteur $h < H$ de vin dans le tonneau. Quel volume de vin reste-t-il à boire ?

Exercice 3. Calculer le volume du domaine D de $\mathbb{R}^3$ correspondant à l'intersection de la boule de centre 0 et de rayon R et du cône $C(\alpha)$, avec $\alpha > 0$, défini par

$$C(\alpha) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad z > 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 < \alpha z^2\}.$$

Exercice 4. (examen, janvier 2011) On appelle tore de rayons 2 et 1 le domaine T de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 < 1\}.$$

- (1) Donner l'expression de T en coordonnées cylindriques $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$.
- (2) Dessiner l'ensemble T .
- (3) On pose $r = 2 + \varrho \cos \varphi$ et $z = \varrho \sin \varphi$.
 - (a) Calculer la jacobienne de la fonction $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par
$$\Phi(\varrho, \theta, \varphi) = ((2 + \varrho \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \varrho \cos \varphi) \sin \theta, \varrho \sin \varphi).$$
 - (b) Calculer le déterminant de la jacobienne (le jacobien) de Φ .
 - (c) Utiliser le changement de coordonnées $(x, y, z) = \Phi(\varrho, \theta, \varphi)$ pour calculer le volume du tore T .

Exercice 5. Calculer la circulation du champ de vecteur $V(x, y, z) = (x^2 - y, y^2 + x)$ le long du cercle de rayon r centré en $(0, 0)$.

Exercice 6. Appliquer la formule de Green–Riemann pour calculer l'aire du domaine délimité par les courbes d'équations $y = x^2$, $x = y^2$, $8xy = 1$ et dont le bord contient le point $(0, 0)$.