

Paramétrage

1. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les points $A = (-1, -1, 0)$, $B = (-2, 1, 1)$ et $C = (1, 1, 1)$. Trouver l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que le plan $\langle A, B, C \rangle$ soit le graphe $\{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

A quelle condition sur $M \in \mathbb{R}^3$ existe-t-il une application f telle que le plan $\langle A, B, M \rangle$ coïncide avec le graphe $\{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$?

*2. L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (5 + 2x - x^2, 2x^2 - 4x - 4)$ paramétrise-t-elle une droite de $\mathbb{R}^2$?

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (\cos(x^2 - 2x - 3), \sin(x^2 - 2x - 3))$ paramétrise-t-elle un cercle de $\mathbb{R}^2$?

*3. Montrer que l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$ paramétrise le cercle unité privé d'un point (lequel ?).

Fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

4. Quel est le domaine de définition des fonctions $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x-2}$, $x \mapsto \sqrt{4-x} + \sqrt{x^2-1}$, $x \mapsto \tan(\frac{x}{2}) + \log(x^2 + x - 2)$?

5. Soit $\mathcal{C}$ la partie paramétrée $\{(t^3, t^2), t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont $\mathcal{C}$ est le graphe. La fonction f est-elle dérivable en tout point ?

6. Calculer $\log(9)$ avec une précision de $\frac{1}{10}$ puis $\frac{1}{100}$ (utiliser l'inégalité $|\log(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n})| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$ si $-1 < x \leq 0$, $\leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ si $0 \leq x \leq 1$).

* Montrer l'inégalité ci-dessus à partir de la formule $1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$.

7. Soit f l'application $[0, 5] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t$. Quels sont les points où f admet un minimum local ? Quelle est la plus petite valeur prise par f ?

8. Donner une primitive avec domaine de définition des fonctions $x \mapsto 1 - 2x + e^{3x}$, $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, $x \mapsto x \cos(x^2)$, $x \mapsto \frac{1}{x \log(x)}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \tan(x)$

9. Soit l'équation différentielle (scalaire)

$$y' - 2y = 1 \quad (1)$$

On cherche une solution de (1) sous la forme $y(x) = e^{2x}z(x)$ avec z une fonction dérivable. Quelle équation différentielle vérifie z ? Quels sont les fonctions z solutions ? Une solution de (1) peut-elle toujours s'écrire sous la forme indiquée ?

Résoudre de même l'équation $y' - 2y = x^2 + x$.

10. Soit l'équation différentielle

$$y' - xy = x \quad (1)$$

On cherche une solution sous la forme $y(x) = e^{a(x)}z(x)$. Trouver une fonction a telle que l'équation différentielle vérifiée par z soit simple puis résoudre (1).

11. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 3y = \sin(x) \quad (1)$$

Trouvez les réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ soit solution de l'équation homogène $y'' + 2y' - 3y = 0$.

On pose $y(x) = e^{\alpha x}z(x)$ où α est l'une des solutions trouvées ci-dessus. Montrer que la fonction dérivée z' vérifie une équation différentielle d'ordre 1. Pouvez-vous résoudre cette équation ?

Alternativement résoudre l'équation ci-dessus par la méthode de variation des constantes.

12. Retrouver le rayon de courbure en 0 de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

Retrouver la longueur parcourue par $(\cos(t), \sin(t))$ lorsque t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Que se passe-t-il si on remplace $(\cos(t), \sin(t))$ par $(\cos(t^2), \sin(t^2))$?