L2 MASS 2015-2016, semestre 2, UEF Mathématiques 4

Feuille d'exercices numéro 4 : dérivées partielles, topologie de $\mathbb{R}^n$ et calculs d'extrema globaux

Exercice I. *Le modèle : extrema de fonctions d'une variable*
Dans chaque cas suivant, dire pourquoi f admet un maximum $f(x_{max})$ et un minimum $f(x_{min})$ sur les intervalles considérés. Calculer f'. Quels sont les candidats pour x_{max} et x_{min} ? Calculer $f(x_{max})$ et $f(x_{min})$ (sans faire de tableau de variations !).
a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[0, 5]$ puis sur $[0, 1]$,
b. $f(x) = 5x + 1/x^5$ sur $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ puis sur $[2, 4]$.

Exercice II. *Ouverts, fermés et compacts de* $\mathbb{R}$
Nature (ouvert, fermé, borné, compact...) des parties suivantes de $\mathbb{R}$: $A = [1, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$, $C = [1, 2[$, $D = \{0\}$ (suggestion : pour les fermés utilisez les suites, pour les ouverts étudiez le complémentaire).

Exercice III.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \leq a\}.$$

a. Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ. Montrer que $f(\ell) \leq a$.
b. Nature de A (ouvert, fermé, rien du tout).
2. Nature de
a. $E = \{x \in \mathbb{R} |\ \exp(x) \geq 2x + 1\}$,
b. $F = \{x \in \mathbb{R} |\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0\}$ et $G = \{x \in \mathbb{R} |\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0\}$.

Exercice IV. Soit $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, [x] = 12\}$. F est-il fermé ? Comparer avec l'exercice précédent.

Exercice V. *Fermés avec la définition (caractérisation à l'aide des suites) : on rappelle qu'une partie F de $\mathbb{R}^2$ est fermée si la limite de toute suite convergente d'éléments de F appartient à F.*
1. Montrer que les ensembles $A = \{(x, y),\ x \geq 0\}$ et $B = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbb{R}^2$ sont fermés.
2. On définit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Montrer que C n'est pas fermé. Est-il ouvert ?

Exercice VI. *Ouverts, fermés : caractérisation à l'aide de fonctions continues*
Décider si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, compacts :
a. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 12\}$,
b. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y \leq 12\}$,

c. $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 12\}$.

Exercice VII. *Compacts*
Soit

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1\}.$$

Montrer que K est compact.

Exercice VIII. *Dérivées partielles (révisions)*
Existence et calcul le cas échéant des dérivées partielles en $(0,0)$ de :
a. $f(x,y) = x^3/(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$,
b. $h(x,y) = \frac{x^2+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$.

Exercice IX. Points critiques des fonctions suivantes :
a. $h : (x,y) \mapsto x^2 - x^4 - y^2$ (pour l'exo **X.**),
b. $g : (x,y) \mapsto xy(a-x-y)$ où $a > 0$ (pour l'exo **XI.**),
c. $f : (x,y) \mapsto x - x^2y + y^2$.

Exercice X. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$. Dire pourquoi h admet un maximum et un minimum sur

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et les calculer.

Exercice XI. Soit $a > 0$ et

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ a \geq x + y \geq 0\}.$$

1. Montrer que T est compact.
2. On pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy(a-x-y)$. Dire pourquoi g admet un minimum et un maximum sur T. Les calculer.

Corrigé de l'exercice numéro XI

1. - T est fermé : remarquons que $T = T_1 \cap T_2 \cap T_3$ avec

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \geq 0\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geq 0\},$$
$$T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + y \leq a\}.$$

On montre comme d'habitude que T_1, T_2 et T_3 sont fermés : on a $T_1 = \{(x,y) |\ p_1(x,y) \geq 0\}$ où p_1 est la première projection. Comme p_1 est continue, T_1 est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (voir cours). De même, $T_2 = \{(x,y) |\ p_2(x,y) \geq 0\}$ où p_2 est la deuxième projection (continue) et $T_3 = \{(x,y) |\ g(x,y) \leq 0\}$ où $g(x,y) = x + y - a$ est continue. T_2 et T_3 sont donc des fermés de $\mathbb{R}^2$. T est donc fermé comme intersection de trois fermés.
- T est borné : en effet, pour tout $(x,y) \in T$ on a $|x| \leq a$ et $|y| \leq a$. On a donc $T \subset \overline{B}_{||.||_\infty}((0,0),a)$ (voir cours).
Conclusion : T est compact.
2. g est continue sur le compact T : elle admet donc un maximum $g(x_{max}, y_{max})$ et un minimum $g(x_{min}, y_{min})$ sur T ($(x_{max}, y_{max}) \in T$ et$(x_{min}, y_{min}) \in T$) . On note

$$\overset{\circ}{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0, \ y > 0, x + y < a\},$$
$$\partial T = \{(x,y) \in T / \ x = 0, \ ou \ y = 0 \ ou \ x + y = a\}.$$

$\overset{\circ}{T}$ est *l'intérieur* de T : il est essentiel de constater que c'est un OUVERT de $\mathbb{R}^2$ (c'est l'intersection de trois ouverts : on peut procéder comme ci-dessus). ∂T est le *bord* de T et l'on a $T = \overset{\circ}{T} \cup \partial T$.
Il y a deux cas de figure : soit $(x_{max}, y_{max}) \in \overset{\circ}{T}$ auquel cas (x_{max}, y_{max}) est *un point critique de g parce que* $\overset{\circ}{T}$ *est OUVERT*, soit $(x_{max}, y_{max}) \in \partial T$ (même chose pour (x_{min}, y_{min})).
Premier cas de figure : on cherche les points critiques de g qui appartiennent à $\overset{\circ}{T}$. Le seul point critique qui appartient à $\overset{\circ}{T}$ est $(a/3, a/3)$ (voir exo **VIII**). C'est le premier candidat pour (x_{max}, y_{max}) ou (x_{min}, y_{min}).
Deuxième cas de figure : il faut trouver le maximum et le minimum de la restriction de g à ∂T . Il y a trois cas :
I. si $x = 0$ on cherche le maximum et le minimum de $g_1 : [0,a] \to \mathbb{R}$, $g_1(y) = g(0,y) = 0$ ce qui n'est pas très compliqué.
II. si $y = 0$ on cherche le maximum et le minimum de $g_2 : [0,a] \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = g(x,0) = 0$ ce qui n'est pas très compliqué non plus.
III. si $x + y = a$, $(x, y \geq 0)$ on cherche aussi le maximum et le minimum de la fonction nulle, donc voilà.
Résumons : si $(x,y) \in \partial T$ alors $g(x,y) = 0$. Comme $g(a/3, a/3) = a^3/27 > 0$, on en déduit que le maximum de g vaut $a^3/27$, atteint en $(a/3, a/3)$. Le minimum de g vaut 0, atteint en tout point de ∂T.