L2 MASS 2015-2016, Analyse : feuille d'exercices numéro 3. Normes, convergence et continuité

Exercice I. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y) = |x|$. Est-ce que f est une norme sur $\mathbb{R}^2$? Même question pour $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = x + y$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = |x| + |y|$ (que reconnaissez-vous dans ce dernier cas ?).

Exercice II. 1. Que signifie : *la suite de vecteurs* $(\vec{U}_p)$ *converge vers le vecteur* $\vec{U}$ *pour la norme* $||.||_\infty$?
2. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer

$$||(\frac{1}{p^2}, \frac{p^3 + 2p + 1}{p^3 + p + 1}, \frac{1}{p^4} - 1) - (0, 1, -1)||_\infty.$$

La suite $((\frac{1}{p^2}, \frac{p^3+2p+1}{p^3+p+1}, \frac{1}{p^4} - 1))$ de $\mathbb{R}^3$ converge-t-elle pour la norme $||.||_\infty$? Si oui, quelle est sa limite ?
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la norme $||.||_\infty$ par la norme $||.||_1$.

Exercice III. *Convergence de suites de vecteurs*
1. On définit $(x_n, y_n) = (1 + e^{-n}, 4 + e^{-n})$. Déterminer si la suite $((x_n, y_n))$ admet une limite (x, y) coordonnée par coordonnée. Si oui, calculer $||(x_n, y_n) - (x, y)||_1$. La suite $((x_n, y_n))$ converge-t-elle vers (x, y) pour la norme $||.||_1$?
2. Reprendre la question 1. en remplaçant la norme $||.||_1$ par la norme $||.||_\infty$.
3. Reprendre la question 1. en remplaçant la norme $||.||_1$ par la norme $||.||_2$.

Exercice IV. *Comparaison de normes usuelles sur* $\mathbb{R}^2$
1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$||(x, y)||_\infty \leq ||(x, y)||_1 \leq 2||(x, y)||_\infty.$$

Les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?
2. En utilisant 1., montrer que si une suite $((x_n, y_n))$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers (x, y) pour la norme $||.||_\infty$ alors elle converge vers (x, y) pour la norme $||.||_1$. Montrer de même que si une suite $((x_n, y_n))$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers (x, y) pour la norme $||.||_1$ alors elle converge vers (x, y) pour la norme $||.||_\infty$.
3. Comment généraliser la question **1.** pour montrer que les normes $||.||_1$ et $||.||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes ?

Ce qu'il faut retenir : *La convergence d'une suite de* $\mathbb{R}^2$ *(ou de* $\mathbb{R}^3$*...) ne dépend pas de la norme choisie, la raison en étant que toutes les normes sur* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*...) sont équivalentes. Nous dirons donc simplement que la suite* $((x_n, y_n))$ *converge au lieu de dire que la suite* $((x_n, y_n))$ *converge pour la norme* $||\ ||_1$ *(ou* $||\ ||_2$*, ou* $||\ ||_\infty$ *ou ...) Et une suite de* $\mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*...) converge si et seulement si elle converge "coordonnée par coordonnée".*

Exercice VI. *Fonctions continues d'une variable réelle*
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \frac{1}{\sqrt{x_0}}.$$

En déduire que f est continue en x_0.

Exercice VII. On définit $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $p_2(x, y) = y$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|p_2(x, y) - p_2(a, b)| \leq ||(x, y) - (a, b)||_\infty.$$

En déduire que p_2 est continue en (a, b).

Exercice VIII. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (ax + by, cy)$$

a, b et c désignant trois nombres réels fixés. Soit de plus $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
1. Calculer $||f(x, y) - f(x_0, y_0)||_1$.
2. Montrer qu'il existe un nombre réel $M \geq 0$, dépendant de a, b et c, tel que

$$||f(x, y) - f(x_0, y_0)||_1 \leq M||(x, y) - (x_0, y_0)||_1.$$

En déduire que f est continue en (x_0, y_0).

Exercice IX. On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que l'on a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x, y) - f(0, 0)| \leq |x|$. En déduire que f est continue en $(0, 0)$.

Exercice X. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^4}$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = a$, a étant un nombre réel fixé.
1. Montrer que la suite $((\frac{1}{n}, 0))$ converge vers $(0, 0)$. Calculer $f(\frac{1}{n}, 0)$ puis la limite de la suite $(f(\frac{1}{n}, 0))$.
2. Montrer que la suite $((0, \frac{1}{n}))$ converge vers $(0, 0)$. Calculer $f(0, \frac{1}{n})$ puis la limite de la suite $(f(0, \frac{1}{n}))$.
3. Peut-on trouver a de sorte que f soit continue en $(0, 0)$?