L2 MASS 20015-2016, semestre 2, UEF Mathématiques 4

Feuille d'exercices numéro 1. Suites et séries

Exercice I. *Suites dans* $\mathbb{R}$
Etudier la convergence de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants et préciser sa limite éventuelle :
a. $u_n = \ln(12(n+1)) - \ln(n)$ (indication : utiliser la formule $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$),
b. $u_n = n^3 e^{-n} + \frac{1}{n}$,
c. $u_n = (n^3 + n + 1)/(12n^3 + 2n + 4)$ (indication : factoriser par n^3 au numérateur et au dénominateur),
d. $u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)}$ (indication : écrire $\frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$),
e. $u_n = n^{1/n}$ pour $n \geq 1$ (indication : écrire la puissance sous forme exponentielle).

Exercice II. 1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (indication : c'est la limite d'un taux d'accroissement). En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$.
2. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. En écrivant $u_n = \exp(n \ln(1 + \frac{1}{n}))$ et en utilisant la première question montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$.
3. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite (w_n) définie, pour $n \geq 1$, par $w_n = (1 + \frac{a}{n})^n$.

Exercice III. On rappelle que, si n est un entier supérieur ou égal à 1,

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

et $v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$.
0. Rappeler le théorème sur les suites adjacentes.
1. Montrer que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On note e leur limite commune. Déterminer un encadrement de e d'amplitude inférieure à 10^{-3}.

Exercice IV. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. Pour tout $x \geq 0$, montrer que $\ln(1 + x) \leq x$ (étudier la fonction $x \mapsto x - \ln(1 + x)$).
2. En déduire que, pour tout $k \geq 1$,

$$\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

puis que, pour $n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq u_n.$$

3. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

Exercice V. Etudier la convergence de la suite (S_n) définie, pour $n \geq 0$, par

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n,$$

$1 > q > 0$ (on pourra commencer par exprimer simplement S_n en fonction de q et n).

Exercice VI. 1. Montrer que, pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

2. On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer, en utilisant **1.**, que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduire que la suite (u_n) est majorée puis qu'elle est convergente.

Exercice VII. Traduire les conclusions des exercices **III**, **IV**, **V** et **VI** dans le langage des séries.

Exercice VIII. *Etude de la nature de séries en utilisant le calcul des sommes partielles. Calculs de sommes en cas de convergence*
1. On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Montrer que la série de terme général u_n est convergente (indication : calculer les sommes partielles) et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
2. On pose, pour $n \geq 0$, $v_n = \frac{1}{(n+11)(n+12)}$. Trouver deux réels a et b tels que

$$v_n = \frac{a}{n+11} + \frac{b}{n+12}.$$

En déduire que la série de terme général v_n est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
3. Montrer que $\sum e^{-n}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$.
4. Montrer que la série de terme général $u_n = 12$ est divergente.

Exercice IX. *Comparaison*
Nature des séries $\sum \frac{1}{n^2+4n+317}$, $\sum \frac{n^4}{n^5-1}$, $\sum e^{-n^2}$ (pour cette dernière, on pourra remarquer que $0 \leq e^{-n^2} \leq e^{-n}$ pour tout n positif).

Exercice X. *Les séries de Riemann (voir aussi le cours). Généralisation de l'exercice* ***VI.***
Dans tout cet exercice, α désigne un nombre réel strictement plus grand que 1.
1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}].$$

3. Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{\alpha - 1}[\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}]$$

converge (on pourra calculer les sommes partielles associées).
4. Nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$.

Exercice XI. *Equivalents*
1. Trouver un équivalent aux suites $u_n = \frac{n}{n^4+1}$, $v_n = \frac{n^2+e-n}{n^3+2}$ et $r_n = (1 + e^{-n^2})(\frac{1}{2})^n$. Nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum r_n$.
2. Nature des séries $\sum \frac{n^{1/n}}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\sum a^n(1+e^{-n})$ $(a > 0)$, $\sum \ln(1 + \frac{1}{n^\alpha})$ $(\alpha > 0$, on pourra montrer que $\ln(1 + \frac{1}{n^\alpha})$ est équivalent à $\frac{1}{n^\alpha})$.

Exercice XII. *Règles de d'Alembert et de Cauchy*
1. Nature des séries $\sum n(n+1)a^n$ $(a > 0)$, $\sum \frac{n^n}{4^n n!}$.
2. Nature des séries $\sum(\frac{n}{2n+1})^n$, $\sum(1 + \frac{a}{n})^{n^2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Exercice XIII. *Convergence absolue. Critère sur les séries alternées*
1. Les séries suivantes sont elles absolument convergentes ? Convergentes ?
$\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{1+2^n}$, $\sum(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.
2. En utilisant la règle de d'Alembert, montrer que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$. Etudier de même la nature de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ si x est un réel.

Exercice XIV. *Le critère des équivalents ne marche pas si les termes ne sont pas positifs*
1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente (utiliser le critère sur les séries alternées).
2. On pose, pour tout $n \geq 2$,

$$v_n = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Montrer que v_n est positif et que $v_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ (réduire au même dénominateur). En déduire que la série $\sum v_n$ est divergente puis que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente.

Conclusion : on a $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ mais les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne sont pas de même nature. Est-ce en contradiction avec le théorème du cours sur les équivalents ?

Exercice XV. *Quelques calculs approchés de sommes de séries*
1. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$, est convergente. On note S sa somme. Comment faire pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-1} près ? 10^{-2} près ?
2. Montrer que $\sum \frac{1}{1+2^n}$ est convergente. On note S sa somme, S_n sa somme partielle d'ordre n. On a donc $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$. En remarquant que $\frac{1}{1+2^k} \leq \frac{1}{2^k}$, montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{1+2^k} \leq \frac{1}{2^n}(1 - (\frac{1}{2})^{N-n})$$

En déduire que $0 \leq S - S_n \leq \frac{1}{2^n}$. Comment faire pour obtenir une valeur approchée de S à 10^{-3} près ?

Exercice XVI. 1. Soit (x_n) une suite d'entiers tels que $0 \leq x_n \leq 9$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que la série $\sum \frac{x_n}{10^n}$ est convergente (utiliser le critère de comparaison).
2. On définit dans cette question (x_n) par $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 9$, $x_3 = 7$ et $x_{n+3} = x_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n} = \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \frac{1}{10^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

puis calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$ sous forme de fraction rationnelle. Quel sens donner à $0,297297...$?
3. Calculer le nombre $0,297297... \times 3,3636...$ (donner le résultat sous forme de fraction rationnelle, après avoir exprimé, en s'inspirant de **2.**, $3,3636...$ sous forme de fraction rationnelle).