L2 MASS 2015-2016, UEF Mathématiques 4

Feuille d'exercices numéro 2. Intégration (A. Douai)

Exercice I. Calculer $I_1 = \int_0^2 (x^4 + 3x)dx$, $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$, $I_3 = \int_0^1 e^x dx$, $I_4 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$, $I_5 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$, $I_6 = \int_0^2 \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$, $I_7 = \int_0^\pi \sin(x)\cos^3(x)dx$.

Exercice II. A l'aide d'intégration par parties, calculer $J_1 = \int_0^1 xe^x dx$, $J_2 = \int_0^1 x^2 e^x dx$, $J_3 = \int_1^2 x\ln(x)dx$, $J_4 = \int_1^2 \ln(x)dx$.

Exercice III. 1. Calculer $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ $(x \geq 1)$.
2. Montrer que $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ $(x \geq 1)$.
3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Exercice IV. *changement de variable*
1. Calculer $J = \int_{12}^{13} \frac{dt}{t\ln^2(t)}$ (poser $x = \ln(t)$).
2. En utilisant le changement de variable $x = 1/t$ montrer que

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_1^{1/2} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

En déduire la valeur de $\int_{1/2}^2 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

Exercice V. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

1. Montrer que F est croissante (calculer F').
2. Calculer $\int_1^x e^{-t}dt$.
3. Montrer que $F(x) \leq \int_1^x e^{-t}dt$ puis que F est majorée.
4. La fonction F a-t-elle une limite quand $x \to +\infty$?
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$?

Exercice VI. Soit $x \in]0, 1]$. En utilisant une intégration par parties, calculer

$$G(x) = \int_x^1 \ln(t)dt.$$

Montrer que la fonction G a une limite quand $x \to 0$, $x > 0$. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$?

Exercice VII. 1. Calculer, pour $\alpha \neq 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$.
2. En déduire que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

si $\alpha > 1$ et que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = +\infty$$

si $\alpha < 1$.
3. Etudier de la même manière $\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.
4. Convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

Exercice VIII. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est-elle convergente ?

Exercice IX. *Comparaison, équivalents*
Nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ (on pourra comparer e^{-t^2} et e^{-t} puis utiliser l'exercice précédent), $\int_1^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt$, $\int_0^1 \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$.

Exercice X.*Problème de convergence aux deux bornes*
Nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{t^2}dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{\sqrt{t}}dt$.

Exercice XI. Soit n un entier et x un réel positif. On définit

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}dt.$$

1. Calculer $I_0(x)$. Déterminer pour $n > 0$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x)$.
2. Calculer $J_0 = lim_{x\to+\infty} I_0(x)$ puis $J_n = lim_{x\to+\infty} I_n(x)$ pour $n \geq 1$.
3. Nature, et valeur en cas de convergence, de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.

Exercice XII. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

1. Montrer que, pour tout réel t,

$$(1 - t^2 + t^4 + \cdots + (-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

2. En déduire que

$$S_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt.$$

3. Montrer que, pour tout réel $t \in [0, 1]$,

$$\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}.$$

En déduire une majoration de $|S_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}|$ puis que la suite (S_n) est convergente.
4. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$? Si elle converge, quelle est sa somme ?

Exercice XIII. *Pour information : la formule de Taylor avec reste intégral*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ autant de fois dérivable que nécessaire, a et b deux points de I.
1. Exprimer $f(b) - f(a)$ en fonction de $\int_a^b f'(t)dt$.
2. En intégrant par parties, montrer que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)dt$$

puis que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} f^{(3)}(t)dt.$$

C'est la *formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre* 2.
3. On suppose qu'il existe M tel que $|f^{(3)}(t)| \leq M$ pour tout $t \in [a, b]$. Donner une majoration de

$$|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{1}{2}(b-a)^2 f''(a)|.$$