

Formulaire 4 : La méthode de Newton**version du 8 avril 2016**

L'objectif est de calculer de manière approchée la solution d'une équation scalaire de la forme $f(x) = 0$. On construit par récurrence une suite x_n à partir d'une valeur initiale x_0 . Cette méthode converge très rapidement dans un voisinage de x .

1) L'algorithme

Si x_n est une solution approchée à l'étape n de l'équation $f(x) = 0$ on cherche x_{n+1} sous la forme $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$. On obtient en utilisant un développement de Taylor :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \Delta x_n) \sim f(x_n) + \Delta x_n f'(x_n) \sim 0 \implies \Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La suite récurrente est donc définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

2) Exemple

Le nombre $x = \sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 - 2 = 0$. La récurrence s'écrit pour $f(x) = x^2 - 2$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}$$

Pour $x_0 = 1$ les 5 premiers itérés sont :

$x_1 = 1.500000$	$f(x_1) = 0.250000$	$ x_1 - \sqrt{2} = 8.578644e - 02$
$x_2 = 1.416667$	$f(x_2) = 0.006944$	$ x_2 - \sqrt{2} = 2.453104e - 03$
$x_3 = 1.414216$	$f(x_3) = 0.000006$	$ x_3 - \sqrt{2} = 2.123901e - 06$
$x_4 = 1.414214$	$f(x_4) = 0.000000$	$ x_4 - \sqrt{2} = 1.594724e - 12$
$x_5 = 1.414214$	$f(x_5) = 0.000000$	$ x_5 - \sqrt{2} = 0.000000e + 00$

La convergence est donc très rapide.

3) La programmation

Il est bien entendu possible d'utiliser une boucle **for** pour calculer les itérés successifs. Comme le nombre d'itération nécessaire pour obtenir une précision donnée n'est pas connu, il est préférable d'utiliser une boucle **while** avec une précision donnée. Le programme calculant la solution de l'équation $f(x) = 0$ s'écrit :

```

// test Newton
clear
function y=f(x)
y=x*x-2;
endfunction

function y=df(x)
y=2*x;
endfunction

// programme principal
x=1; test=1;eps=1e-6;

while test>eps
ax=-f(x)/df(x); x=x+ax; test=abs(ax);
printf("x=%f, f(x)=%f, |x-sqrt(2)|=%e \n",x,f(x),abs(x-sqrt(2)));
end

```

et il donne les résultats suivants :

```

-->exec('/home/demay/Ens:12-13/M1/MN/B-Newton/Newton.sci', -1)
x=1.500000, f(x)=0.250000, |x-sqrt(2)|=8.578644e-02
x=1.416667, f(x)=0.006944, |x-sqrt(2)|=2.453104e-03
x=1.414216, f(x)=0.000006, |x-sqrt(2)|=2.123901e-06
x=1.414214, f(x)=0.000000, |x-sqrt(2)|=1.594724e-12
x=1.414214, f(x)=0.000000, |x-sqrt(2)|=0.000000e+00
-->

```