

Partiel*7 mars 2016 durée 0h30 sans documents*

Important : les instructions écrites en langage informatique doivent être parfaitement calligraphiées afin d'éviter toute ambiguïté !

Le nombre de points dans les instructions manquantes n'est pas significatif !

1) Tracé de graphe. Ecrire en **Scilab** le programme traçant le graphe dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ de la fonction $y = \max(x, \exp(\sin(4x)))$. On complètera le programme suivant :

```
clear
x=0:2*%pi/100:2*%pi;
y= ..... ;
plot2d(x,y,5);
```

2) Calcul matriciel. On considère la matrice 4×4 A et le vecteur colonne X suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.1) Ecrire en **Scilab** les commandes générant la matrice A et le vecteur X . On complètera les instructions :

$A=[2, \dots\dots\dots]; X=[1 \dots\dots];$

2.2) On construit les suites récurrentes suivantes (dans l'équation (1) $\|Y\|$ désigne la norme euclidienne du vecteur $Y \in \mathbb{R}^4$) :

$$X_1 = X \quad ; \quad X_{n+1} = \frac{AX_n}{\|AX_n\|} \quad ; \quad \lambda_n = \langle AX_n, X_n \rangle \quad (1)$$

Ecrire le programme calculant les N premiers termes de ces suites ($N = 10$ par exemple). On utilisera une boucle itérative **for k=1:N end** et la fonction **norm**. On admet que la suite λ_n converge vers une limite λ . Que représente λ à votre avis ?

3) Tirage aléatoire. On utilise l'instruction `X=rand(N,M,"uniform")` pour générer un tableau à N lignes et M colonnes de nombres aléatoires dans l'intervalle [0, 1].

3.1) On effectue le tirage d'une colonne de N nombres. Ecrire le programme calculant la moyenne m et la variance Var . On rappelle que moyenne et variance sont définies par :

$$m = \frac{1}{N} \sum_1^N X(i) \quad ; \quad Var = \frac{1}{N} \sum_1^N (X(i) - m)^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N (X(i))^2 - m^2$$

On complétera le programme suivant :

```
clear
N=10000;M=1;
X=rand(N,M,"uniform");
m= ..... ;
Var= ..... ;
printf("Moyenne=%f ; Variance=%f \n",m,Var);
```

Quels sont les résultats théoriques ?

3.2) On effectue le tirage de deux colonnes de N nombres. Ecrire le programme calculant la moyenne et la variance de chaque colonne ainsi que la covariance des deux colonnes.

4) Méthode de Monte-Carlo. Estimer par la méthode de Monte-Carlo le volume V du domaine suivant (c'est le huitième de la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$) :

$$\mathcal{S}^+ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 ; y > 0 ; z > 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$$

On complétera le programme suivant :

```
clear
N=10000;M=3;
X=rand(N,M,"uniform");

K=0;
for i=1:N
R2= ..... ;
if (R2<1) then ..... ; end
end

V= ..... ;
printf("N=%d ; Estimation du volume=%f \n",N,V);
```

Option Calcul : Corrigé du partiel du 7 mars 2016

1) Tracé de graphe : 3

```
x=0:2*pi/100:2*pi;  
y=max(x,exp(sin(4*x)));  
plot2d(x,y,5);
```

3

2) Calcul matriciel : 5

2.1) $A = [2, 1, 0, 0; 1, 2, 1, 0; 0, 1, 2, 1; 0, 0, 1, 2]; X = [1; 1; 1; 1];$

1 + 1

2.2)

```
N=10;  
for k=1:N  
Y=A*X;lambda=X'*Y;X=Y/norm(Y);  
end
```

1 + 1

λ est la plus grande valeur propre de la matrice A

1

3) Tirage aléatoire : 8

3.1)

```
N=10000;M=1;X=rand(N,M,"uniform");  
m=ones(1,N)*X/N;  
Var=X'*X/N-m**2;  
printf("Moyenne=%f ; Variance=%f \n",m,Var);
```

1

1

Résultats théoriques : $m = 0.5$ $Var = \frac{1}{12}$

1

3.2)

```
N=10000;M=2;X=rand(N,M,"uniform");  
• Moyenne colonne 1 et moyenne colonne 2  
• Variance colonne 1 et variance colonne 2  
• Covariance colonnes 1 et 2
```

1+1

1+1

1

4) Méthode de Monte-Carlo : 4

```
N=10000;M=3;X=rand(N,M,"uniform");  
K=0;  
for i=1:N  
R2=X(i,:)*X(i,:);  
if (R2<1) then K=K+1; end  
end  
V=K/N;  
printf("N=%d ; Estimation du volume=%f \n",N,V);
```

1

2

1