

Option Calcul : Examen

L2 Mass

2015-2016

18 avril 2016 durée 0h45 sans documents

Les instructions écrites en langage informatique doivent être parfaitement calligraphiées afin d'éviter toute ambiguïté. Le nombre de points ou le nombre de lignes dans les instructions manquantes ne sont pas significatifs !

1) Tirages aléatoires.

On rappelle que l'instruction `X=rand(N,M,"uniform")` permet de générer un tableau à N lignes et M colonnes de nombres aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$. On effectue le tirage d'une colonne X de N nombres ($M=1$) aléatoires dans l'intervalle $[0, 1]$. La moyenne m et la variance Var de X sont définies par les formules :

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i) \quad ; \quad Var = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i) - m)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i))^2 - m^2$$

La moyenne m est calculée par l'instruction `m=mean(X)`.

1.1) Calcul de variance. Ecrire les instructions permettant de calculer la variance de X . On complétera le programme suivant :

```
clear
N=1000;M=1;X=rand(N,M,"uniform");
m=mean(X);
Var=..... ;
printf("Moyenne=%f ; Variance=%f \n",m,Var);
```

Quels sont les résultats théoriques pour la moyenne et la variance de X ?

1.2) Calcul de covariance. La variable Y est définie par $Y = X^2$. Ecrire les instructions permettant de calculer la variance de Y et la covariance $Cov_{X,Y}$ de X et Y . Cette covariance est définie par les formules suivantes (m_X et m_Y sont les moyennes de X et Y) :

$$Cov_{X,Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i) - m_X)(Y(i) - m_Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i)Y(i) - m_X m_Y$$

On complétera le programme suivant :

```
clear
N=1000;M=1;X=rand(N,M,"uniform");
for i=1:N Y(i)=X(i)**2; end
m_X=mean(X);m_Y=mean(Y);
Var_Y=.....;
Cov_XY=.....;
printf("Moyenne X=%f ; Moyenne Y=%f \n",m_X,m_Y);
printf("Variance Y=%f ; Covariance X et Y=%f \n",Var_Y,Cov_XY);
```

Quels sont les résultats théoriques pour la moyenne et la variance de Y ?
 Quels est le résultat théorique pour la covariance de X et Y ?

2) Une méthode de Rung-Kutta d'ordre 3

L'objectif est de résoudre numériquement l'équation différentielle scalaire d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

L'algorithme de Rung-Kutta d'ordre 3 est défini par le schéma :

$$t_{k+1} = t_k + h \quad ; \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (a_1 + 4a_2 + a_3) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1 = f(t_k, y_k) \\ a_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} a_1) \\ a_3 = f(t_k + h, y_k - h a_1 + 2h a_2) \end{cases}$$

2.1) Le cas particulier.

- Calculer y_{k+1} en fonction de y_k et h dans le cas particulier de la fonction $f(t, y) = y$.
- Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur faite à chaque pas ? On admettra que cette erreur est dans ce cas particulier de la forme :

$$\epsilon^k = |y_{k+1} - e^h y_k|$$

2.2) La programmation. Compléter le programme suivant pour résoudre l'équation différentielle (1) dans le cas particulier de la question 2.1) .

```
// Test RK3
clear
function z=f(t,y)
z=y;
endfunction;

y0=1;T=1;
N=100;h=T/N;
// Calcul de la solution approchée
t(1)=0;y(1)=y0;
for j=1:N
t1=t(j);y1=y(j);ay1=f(t1,y1);
t2=.....;
t3=.....;
t(j+1)=.....;
y(j+1)=.....;
end
```

2.3) Evolution de l'erreur. Indiquer comment vérifier ce programme en comparant les erreurs ϵ_{100} et ϵ_{200} obtenues pour $N = 100$ et $N = 200$.