Plan du cours de mathématiques en L1MASS :

SEMESTRE 1:

Les notions d'ensemble et de sous- ensemble, ainsi que les opérations qui peuvent leur être associées sont revues au cours des différents chapîtres chaque fois que cela est possible.
Il en est de même pour la notion d'application, ainsi que pour toutes les notions qu'il est possible de définir (antécédent, image, injective, surjective, bijective).
linéairement en algèbre linéaire

1)***L'ensemble R^n:***
Ce chapitre est consacré à l'ensemble des n-uplets et à leur représentation géométrique dans certains cas .
Nous reviendrons également sur les plans dans l'espace avec leurs équations et leurs représentations .

2) ***Fonctions numériques :***

- Ce chapitre s'attarde sur les fonctions à valeurs réelles, que l'on soit dans le cadre des fonctions à une variable ou plusieurs variables. Nous parlons également de la notion de limite et continuité pour les fonctions à une variable.
- Nous reviendrons sur la notion de graphe de fonction à une variable et nous définirons ce qu'est le graphe d'une fonction de plusieurs variables , plus spécialement pour les fonctions de deux variables pour parler de surfaces dans R^3.
- Nous définirons les lignes de niveau et les traces .

3) ***Dérivées :***

- L'objet de ce chapitre est de revenir dans un premier temps sur la dérivée d'une fonction réelle à une variable
- puis nous généraliserons la notion de dérivation au travers celle des dérivées partielles.
- Nous reviendrons sur la notion d'extremun pour les fonctions à une variable et reverrons les théorèmes utilisant la dérivée pour étudier les extrema.
- Nous étudierons les premiers exemples d'extrema avec une contrainte pour les fonctions de deux variables. Nous traiterons ces cas en nous ramenant à l'étude d'une fonction d'une variable.

4) ***Propriétés des graphes, lignes de niveau :***

- Ce chapitre est consacré à quelques propriétés classiques qui peuvent être demandées sur les fonctions numériques (approximation affine , concavité, convexité), et aux représentations graphiques .
- On utilise les lignes de niveau des fonctions de deux variables et le vecteur gradient, orthogonal aux lignes de niveau.

5) ***Fonctions usuelles :***
Nous détaillons ici quelques fonctions numériques largement usitées, notamment en économie. Ces fonctions sont la fonction exponentielle, la fonction logarithme népérien, la fonction puissance .

6)**Application du calcul différentiel à quelques problèmes d'économie:**

- Nous commencerons par donner la définition des fonctions homogènes et les propriétés de ces fonctions avec en particulier le théorème d'Euler. Les exemples d'application seront des fonctions utiles en économie.

- Nous travaillerons sur l'approximation affine des courbes de niveau de fonctions de demande et de production pour interpréter le TMS (Taux Marginal de Substitution) à l'aide de dérivée. Nous retrouverons l'expression du TMS comme quotient de dérivées partielles.

Nous travaillerons en particulier sur les fonctions de Cobb-Douglas.

7) **Approximation affine pour une fonction de deux variables**

Nous définirons pour les fonctions de deux variables la notion d'approximation affine .
Nous définirons le plan tangent en un point de la surface représentative d'une fonction de deux variables. Nous obtiendrons ainsi une approximation de la fonction au voisinage du point.

8) **Etude des extrema des fonctions de deux variables:**

- Nous donnerons la condition nécessaire sur les dérivées partielles pour avoir un point extremum.
- Nous verrons ensuite le théorème donnant les conditions suffisantes utilisant le hessien pour étudier la nature des points critiques (en 2 variables)

9) Extrema sous contrainte :

Nous expliquons qu'un extremum lié de f sous la contrainte g(x;y) = 0 est un extremum libre du Lagrangien puis nous faisons une étude locale pour déterminer si un tel point est localement un extremum ou un point col sous la contrainte.

10)Etude de quelques systèmes linéaires.

Il s'agit de révisions des méthodes de substitution et d'opérations équivalentes sur les lignes de systèmes linéaires à deux ou trois inconnues pour résoudre ces systèmes.

SEMESTRE 2 :

11) **Développements limités et étude locale :**

Ce chapitre traite de différents outils permettant une étude locale des fonctions réelles. Ces outils sont, entre autre, la formule de Taylor et les développements limités. Après avoir présenté les généralités, nous nous attardons sur le calcul pratique des développements limités et leur utilisation dans l'étude locale.

12) **Intégration :**

Dans ce chapitre, après être revenu sur le calcul d'une aire, nous traitons le cas des intégrales simples. Un lien est fait entre la notion d'intégrale définie et celle de primitive, puis différentes techniques d'intégration sont détaillées (primitives, intégration par parties, changement de variable uniquement dans le cas où le changement de variable est évident).

13)Matrices

- Nous définissons les matrices à p lignes et n colonnes **à coefficients réels** ainsi que les matrices particulières comme la matrice nulle ou les matrices carrées , en particulier la matrice identité , les matrices triangulaires et diagonales , les matrices symétriques grâce à l'opération de transposition .
- Nous précisons ce que l'égalité de deux matrices signifie .
- Nous définissons ensuite les opérations d'addition de matrices, de multiplication par un

scalaire, et de multiplication de matrices avec la notion de matrices inversibles pour donner la structure de R- algèbre associative à l'ensemble des matrices carrées.
- Nous écrivons un système linéaire sous forme matricielle.
- Nous regardons des exemples d'utilisation de matrices dans des problèmes économiques .

14) Algorithme du Pivot de Gauss pour les systèmes linéaires

- Nous rappelons la définition d'un système linéaire à coefficients réels et sa notation matricielle.
- Nous précisons ce que sont deux systèmes équivalents en termes d'égalité d'ensemble solution.
- Nous définissons ce qu'est un système échelonné et à travers leur résolution nous définissons ce qu'est une variable libre.
- Nous définissons les opérations élémentaires sur les lignes et nous vérifions que ces opérations conservent l'équivalence des systèmes linéaires .
- L'algorithme du pivot de Gauss nous permet de démontrer que tous les systèmes linéaires peuvent être mis sous forme échelonnée réduite . L'algorithme du pivot de Gauss est alors mis en oeuvre pour résoudre les systèmes linéaires.
- La définition du rang d'un système linéaire nous permet de préciser si le système a une solution ou une infinité de solutions ou pas de solution. Nous parlons aussi du rang des matrices.
- Nous nous intéressons à des systèmes linéaires issus de problèmes économiques.

15) **Calcul de l'inverse d'une matrice carrée à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss**

- Nous montrons qu'opérer des opérations élémentaires sur les lignes du système se traduit par une multiplication à gauche de la matrice des coefficients du système par des matrices inversibles bien particulières.
- Dans le cas d'une matrice carrée, nous calculons son inverse , si cela est possible, par l'algorithme du pivot de Gauss appliqué à la matrice bordée par l'identité.
- Nous nous servons de l'inverse de la matrice des coefficients d'un système linéaire carré pour le résoudre.
- Nous inverserons des matrices dîtes de technologie dans des contextes économiques.

16) **Déterminants**

- Nous définissons le déterminant d'une matrice carrée par récurrence en donnant le développement par raport à sa première ligne . Nous introduisons les définitions et notations des mineurs et cofacteurs.
- Nous étudions les déterminants des matrices particulières et nous donnons les principaux résultats sur le déterminant de la somme et du produit de matrices et sur le déterminant de la transposée de la matrice.
- Nous donnons les techniques de simplification du calcul du déterminant en regardant l'effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes .
- Ceci nous permet de généraliser le calcul du déterminant en le développant par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.
- Nous insistons sur le fait qu'un matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro et sur l'équivalence avec le fait que la matrice est de rang maximal et que s'il s'agit de la matrice d'un système linéaire , le système a une unique solution.
- Nous parlons alors de systèmes de Cramer .

Nous démontrons les formules de Cramer pour trouver les solutions du système.

- Nous démontrons ensuite la formule de calcul de l'inverse d'une matrice par la transposée de la

comatrice multipliée par l'inverse du déterminant.

17) **Espaces vectoriels :**

- Après la définition d'un espace vectoriel sur R, nous définissons la notion de sous-espace vectoriel avant d'en venir à toute la terminologie qui leur ~~sont~~ est associée, à savoir : combinaisons linéaires, système générateur, systèmes libres et liés, bases et dimension.
- Les théorèmes seront précisés pour les espaces vectoriels : R^n.
- ~~Nous étudierons les intersections, les sommes et sommes directes d'espaces vectoriels.~~

18) **Applications linéaires :**

Ce chapitre nécessite la compréhension du chapitre précédent. Matrice uniquement

- Après la définition d'une application linéaire, nous introduisons la notion de noyau et d'image d'une application linéaire et de rang avec le théorème du rang.
- Nous présentons la représentation matricielle qu'il peut être fait d'une application linéaire.

Plan du cours de modélisation en L1MASS :

SEMESTRE 1:

1) ***Approximations affines:***

- *Pour les fonctions d'une variable réelle , nous revenons sur la notion d'approximations affines et en particulier sur la meilleure approximation affine donnée par la tangente.*
- *Nous étudions des exemples d'application en économie. Nous expliquons ainsi la défintion du coût marginal comme la dérivée du coût.*
- *Nous définissons le TMS (Taux Marginal de Substitution) pour des courbes décroissantes et convexes.*

2) ***Elasticités***

- *Nous justifions l'intérêt de la notion l'élasticité et nous donnons ses définitions.*
- *Nous calculons les élasticités des principales fonctions d'une variables utilisées en économie.*
- *Nous appliquons cette élasticité pour calculer des prix d'équilibre et appliquée à des fonctions de coût, nous pouvons juger du comportement du coût moyen.*

3) ***Fonctions convexes et concaves d'une variable réelle :***

- *Nous introduisons ces fonctions en nous intéressant aux courbes de satisfaction d'un consommateur .*
- *Puis nous revenons sur les principaux théorèmes de ces fonctions en particulier nous insistons sur la caractérisation des fonctions convexes par le fait que la courbe est au-dessous de ses cordes et par le fait que la courbe est au-dessus de ses tangentes .*
- *Nous donnons l'intérêt de ces fonctions en économie lors de la recherche d'extrema qui est un problème essentiel en économie.*

4) ***Fonctions convexes et Fonctions quasi concaves de deux variables***

- *Nous introduisons les parties convexes de R^2 et leur définition à l'aide des segments.*
- *Nous donnons la définition des fonctions convexes et concaves de deux variables .*
- *Nous voyons qu' une combinaison linéaire de fonctions convexes dont tous les coefficients sont positifs se traduit par une fonction convexe (idem pour la concavité).*
- *Si l'on cherche à déterminer la convexité de $f(x , y) = g(x) + h(y)$, on vérifie la convexité de g et de h. Si les deux sont convexes (ou concaves), on détermine tout de suite la convexité de f sans passer par la hessienne puisque c'est une simple étude de deux fonctions d'une variable.*
- *Nous définissons les fonctions quasi concaves qui sont les fonctions souvent utilisées en économie.*
- *Nous regardons ce qui se passe lors de la composition de ces fonctions convexes et quasi concaves par des fonctions croissantes et concaves ou convexes. Nous appliquons en particulier ces résultats aux fonctions de Cobb-Douglas.*
- *Nous donnons le théorème essentiel sur les extremas globaux de fonctions convexes ou concaves .*

5) ***Etude d'extrema sous contrainte***

- *Nous étudions des situations avec des extremas sous contrainte lorsque les courbes de niveau sont convexes ou que la contrainte est concave (en particulier linéaire).*
- *Dans ce cas le Lagrangien nous donne des conditions suffisantes pour conclure sur la nature des points critiques.*

6) Etude de modélisation par des suites arithmétiques et géométriques

- Nous modélisons des situations de crédit , d'emprunt et de calcul d'intérêts composés avec des suites arithmétiques et géométriques.
- Nous modélisons ainsi un calcul de retraite par capitalisation.