Interrogation 2

Nom : Prénom :

1

On suppose que les préférences de Bertrand pour deux biens (bien 1, bien2) sont modélisées par la fonction d'utilité U définie par :

$$U(x, y) = x(y-1)^2$$

où x et y représentent les quantités respectives des biens 1 et 2. On étudie U sur $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 1\}$.

1. On pose F définie par :
$$F(x, y) = 2ln(y-1) + ln(x)$$
2. Montrer que D est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que F est une fonction concave sur D.
4.
5. Justifier que F est une fonction quasi-concave.
6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Que peut-on en déduire des courbes de niveau de F ?
7. On suppose que Bertrand dispose d'un budget de 76 euros à dépenser en totalité. Le prix unitaire du bien 1 est de 2 euros et celui du bien 2 est de 4 euros.
Donnez l'équation de la contrainte budgétaire .
8. On cherche à ***maximiser*** F ***sur*** D ***sous la contrainte*** $g(x, y) = 0$**.**
   (a) Ecrire la fonction g telle que **la contrainte soit :** $g(x, y) = 0$.
   (b) Ecrire la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ pour F et la contrainte .
   (c) Rappeler le théorème assurant que ce(s) point(s) est (sont) bien (les) solution(s) cherchée(s) .
   Vérifier toutes les hypothèses du théorème et conclure.
   (d) En déduire, en justifiant, le maximum de U sous la contrainte budgétaire.

.

.

2

On reprend la fonction U définie par :

$$U(x, y) = x(y - 1)^2$$

où x et y représentent les quantités respectives des biens 1 et 2. On étudie U sur $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 1\}$.

On admettra que les courbes de niveau de U sont décroissantes , convexes.

1. Le consommateur choisit le panier $(12; 13)$. Calculer le niveau d'utilité atteint.
2. Calculer le TMS de U au point $(12; 13)$.
3. Estimer (à l'aide d'une approximation affine utilisant le TMS) de combien va diminuer y si x augmente de 4 unités.
4. Estimer (à l'aide d'une approximation affine utilisant le TMS) de combien va diminuer x si y augmente de 4 unités.

3

1. Rappeler l'inégalité caractéristique traduisant la position de la corde par rapport à la courbe d' une fonction f concave sur un intervalle $[a; b]$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^3 - 3a^2 + 4$ avec $a > 2$.
   (a) Etudier la fonctions f :dérivées d'ordre 1 et 2, intervalles de convexité et de concavité, limites aux bornes du tableau, branches paraboliques et asymptotes.
   (b) Pour x dans $[0; +\infty[$, f modélise une fonction d'offre d'un produit en fonction du prix (noté x) .
      i. Calculer l'élasticité instantanée de f en x.
      ii. Sachant que l'élasticité est égale à 2 lorsque x est égal à 1 , déterminer a.
      iii. Tracer l'allure du graphe de f dans un repère orhonormé.
      iv. De quel pourcentage varie l'offre si le prix augmente alors de 1% ?
      v. De quel pourcentage varie le prix si l'offre diminue de 4% ?
   (c) BONUS : Pour quel prix une augmentation de 1% du prix entraîne une hausse de 3% de l'offre ? (On commencera par exprimer cette condition en terme d'élasticité).

.

4

1. Calculer le taux mensuel équivalent au taux annuel de 6%.
2. Calculer la somme acquise si on place $16\ 480$ euros durant 5 ans et 3 mois au taux annuel de 6%.
3. A quel taux faut-il placer un capital de $15\ 500$ euros placé durant 4 ans pour avoir la même valeur acquise que dans le placement de la question 2 ?

5

Le coût de production d'un certain produit est représenté ci-dessous par sa courbe et par certaines valeurs données dans un tableau :

1. Quels sont les coûts fixes ?
2. Estimer graphiquement le coût de production pour 500 unités produites ?
3. Estimer graphiquement le coût **marginal** de production pour 500 unités produites ?
4. Estimer graphiquement le coût moyen pour 500 unités produites.