Interrogation 1

Nom : Prénom :

1

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Montrer que la fonction dérivée de f est définie par :$f'x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$
2. Etudier la fonction f sur $\mathbb{R}$ (dérivée, tableau de variations , limites aux bornes, asymptotes) .
   On précisera les points d'inflexion ; les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et les intervalles sur les quels la fonction est concave.
3. Représenter l'allure du graphe de C dans un repère orthonormé en faisant apparaître les points d'inflexion et les tangentes essentielles.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 3.
5. A l'aide de l' approximation affine donnée par la tangente estimer la valeur de $f(3,25)$.
   Justifier que cette approximation est par défaut en utilisant les propriétés de la fonction f.

2

L'utilité d'un consommateur s'écrit :$y(x) = \dfrac{150}{x+5}$

1. Calculer $y(10)$.
2. Etudier la fonction y pour les valeurs de x positives de son domaine de définition (dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du tableau ...)
3. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de y au point $(10; y(10))$.
4. En déduire le TMS de f au point $(10; y(10))$.
5. En déduire la quantité de biens 2 en moins, nécessaires pour garder la même satisfaction, si la quantité de biens 1 augmente de 3 unités.
6. En déduire la quantité de biens 1 en moins, nécessaires pour garder la même satisfaction, si la quantité de biens 2 augmente de 2 unités.

3

On note C la fonction de coût total en fonction de la quantité q.

1. Rappeler la définition du coût moyen.
2. Rappeler la définition du coût marginal. Expliquer pourquoi on peut poser que le coût marginal est égal à la dérivée de la fonction couût total.
3. Estimer la variation du coût pour une augmentation de $\frac{1}{10}$ de la quantité produite à l'aide du coût marginal.
4. Exprimer l'élasticité du coût total à l'aide de l'élasticité du coût moyen .

4

On considère la fonction f définie par $f(p) = 20000\sqrt{100 - p}$.
$f(p)$ est le nombre d'exemplaires vendus d'un certain produit, en fonction du prix unitaire p.

1. Calculer l'élasticité exacte et **l'élasticité instantanée** de f en fonction du prix p.
2. Montrer que l'élasticité est décroissante en fonction de p et négative.
3. Le prix du produit est initialement fixé à 50 euros. Quelle est en pourcentage la diminution des ventes si le prix augmente de 2% ?
4. Le prix du produit est toujours fixé à 50 euros. Quelle doit être la diminution du prix pour que le nombre d'exemplaires vendus augmente de 5% ?
5. Trouver p pour que l'élasticité de f en p soit égale à $-0,6$.

5 Vrai ou faux ?

Soit f une fonction concave sur $\mathbb{R}$ et g une fonction décroissante et convexe sur $\mathbb{R}$.
Est-ce que $g \circ f$ est convexe sur $\mathbb{R}$?

.

.

.

Exercice 1

1. Rappeler la formule de l'approximation affine en a pour une fonction f dérivable en a .
2. En utilisant une approximation affine pour la fonction f définie par $f(t) = (1+t)^{10}$, montrez qu'augmenter un prix de $1,5\%$ dix fois de suite c'est presque l'augmenter de 15%.
3. Montrer que baisser un prix de 2% trois fois de suite c'est presque le baisser de 6%.

Exercice 2

L'utilité d'un consommateur s'écrit :$y(x) = 5(2000 - x)^{\frac{1}{2}}$.

1. Calculer $y(400)$.
2. Etudier la fonction y pour les valeurs de x positives de son domaine de définition (dérivée, tableau de variations, limites aux bornes du tableau ...)
3. Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de y au point $(400; y(400))$.
4. En déduire le TMS au point $(400; y(400))$.
5. En déduire la quantité de biens 2 en moins, nécessaires pour garder la même satisfaction, si la quantité de biens 1 augmente de 100 unités.
6. En déduire la quantité de biens 1 en moins, nécessaires pour garder la même satisfaction, si la quantité de biens 2 augmente de 10 unités.

EXERCICE 3

La fonction de production décrit la relation entre la quantité produite d'un bien et les quantités des différents facteurs nécessaires à sa fabrication.

On suppose ici que P est une fonction de production (ou productivité totale) du facteur x uniquement.

1. Expliquer pourquoi on peut poser la poductivité marginale égale à la fonction dérivée de la fonction P.
2. On pose $P_m = P'$ où P_m désigne la production marginale.
   Répondre au qcm suivant en justifiant (Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses) :
   (a) La productivité marginale atteint son maximum lorsque :
      i. La productivité passe par son point d'inflexion.
      ii. La productivité moyenne décroit .
      iii. la production commence à croître à taux décroissant.
   (b) La productivité moyenne est croissante lorsque :
      i. La productivité marginale lui est inférieure.
      ii. La productivité marginale lui est supérieure.
      iii. La production est croissante.

.

EXERCICE

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$ pour tout x réel. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentativedans le plan.

1. (a) Calculer f', la dérivée de la fonction f.
   (b) Etudier les variations de f . Préciser les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe et les intervalles sur lesquels f est concave.
   (c) La courbe $\mathcal{C}$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées.

2. La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 6, 5[$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros , où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise. La courbe représentative du coût total sur l'intervalle $]0; 6, 5[$ est donnée ci-dessous.

Le prix de vente d'un article est fixé à $13, 25$ euros. On suppose que toute la production est vendue. On considère B la fonction donnant le bénéfice de l'entreprise.

(a) Donner l'expression de $B(x)$.

(b) Etudier les variations de B et en déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer pour avoir un bénéfice maximal.

(c) Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$, où f' est la dérivée de f. Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

(d) Expliquer comment retrouver graphiquement les résultats de la question 2.(b).

3. Le coût moyen de production C mesure le coût en euros par article produit. On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0; 6, 5[$ par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$.

(a) Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}$. Expliquer comment lire graphiquement le coût $C(a)$.

(b) Conjecturer graphiquement les variations de la fonction C.

(c) Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

EXERCICE

Une étude de marché a permis de modéliser la consommation mensuelle de fraises en kg par habitant en fonction du prix par : $Q(p) = \dfrac{p + 16, 2}{4p + 10, 8}$ ($Q(p) = \dfrac{p + 3}{4p + 2, 16}$) pour p compris entre 1 euro et 6 euros.

1. Calculer l'élasticité instantanée de Q par rapport au prix lorque $p = 2$ puis lorsque $p = 3$.
2. Evaluer l'impact sur la consommation d'une hausse de 5% des prix lorsque le kilo coûte 2 euros ?
3. Evaluer l'impact sur la consommation d'une baisse de 7% des prix lorsque le kilo coûte 3 euros ?

EXERCICE

L'entreprise Ducharme produit le bien tel que :
— les quantités vendues sont égales à 1050 pour le prix égal à 10 euros.
— Chaque fois que le prix augment de 1 euro , les quantités baissent de 15 unités.

1. Calculer l'élasticité exacte de la quantité en fonction du prix pour un prix égal à 10 euros.
2. Vérifier que si Q est une fonction affine alors ΔQ est contante (c'est à dire ne dépend pas du prix initial).
3. On admet que Q est une fonction affine . Déterminer cette fonction de demande. Représenter cette fonction dans un repère orthonormé.
4. Calculer la valeur de l'élasticité instantanée pour $P = 20$ puis pour $p = 60$. Calculer les valeurs de p et de Q telles que l'élasticité en p soit égale à -1.
   Calculer la recette pour ces valeurs (On écrira cette recette R comme une fonction de p).
5. Chercher la valeur de p rendant maximale cette recette. Quelle valeur retrouvez-vous ?
6. En utilisant une approximation affine de R, montrer que :

$$R(p + \Delta p) \simeq R(p)$$

   si et seulement si l'élasticité instantanée est égale 'a -1.
7. Etudier l'influence d'une baisse de prix sur la recette . Quelle est l'utilité de cette connaissance pour le producteur ?

Exercice

1. Soit f une fonction concave sur $\mathbb{R}$. Rappeler l'inégalité caractéristique entre la corde et la courbe représentative de f entre les points de coordonnées $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.
2. Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$. Etudier la concavité de f.

Exercice

1. Comment calcule-t-on l'escompte d'une valeur nette V au bout de j *jours* avec un taux d'escompte annuel de t ?
2. Quelle est la formule de la valeur actuelle d'un effet de commerce d'une valeur de 120 euros dans 180 jours avec un taux d'escompte annuel égal à 5% ?

Exercice 2

1. Qu'appelle-t-on valeur actualisée au taux t de la somme S perçue dans n années ?
2. Quelle est la valeur actualisée de 120 euros payée dans un an avec un taux de 20% ?
3. A quelle somme payée dans 2 ans cela correspond-il ?

Exercice

1. Rappeler la formule de l'approximation affine en a pour une fonction f dérivable en a .
2. Montrez en utilisant une approximation affine qu'augmenter un prix de 2% trois fois de suite c'est presque l'augmenter de 6%.

Exercice

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

1. Donner par lecture graphique $f'(3)$ et $f(3)$.
2. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.
3. A l'aide d'une approximation affine de f, donner une estimation de $f(3, 01)$.

Exercice 5

L'élasticité de la demande par rapport au prix d'un produit est égale à $e = \frac{-11}{2}$. Le prix d'une unité de ce produit est de 20 euros. A ce prix , il y a $10\,000$ unités vendues par jour. La consommation passe à 3400 unités par jour suite à une augmentation de prix.

1. Quelle est en pourcentage la diminution d'unités vendues par jour ?
2. Donner l'augmentation du prix et le nouveau prix .

Exercice 6

On donne la loi de demande suivante :
$Q(P) = 200P^2 - 2400P + 10000$.

1. Calculez l'élasticité de la demande lorsque le prisx P augmente de 4 à 5.
2. De combien diminue Q lorsque P augmente de 1% ?
3. Pensez-vous que nous pouvons déduire de la question précédente que lorsque P diminue de 25% , Q augmente de $16,7\%$?

Exercice 7

Pour un produit agricole, la loi de demande est donnée par l'égalité $Q(P) = 200 - 2P$. Comment pensez-vous que variera le revenu des agriculteurs lorsque la récolte asse de $Q = 120$ 'a $Q = 150$?

Exercice 8

Le coût de production d'une usine de fabrication de chaussures de ports est :$C = 200 + 2q^2$ où q est le niveau de production et C le coût total.

1. Si le prix des chaussures est de 100 euros , déterminer combien vous devez produire pour maximiser le profit. Faire une représentation graphique.
2. Déterminer le coût variable , le coût fixe, le coût moyen, le coût moyen variable, et le coût fixe moyen.
3. Tracer la courbe de coût total sur un graphique.
4. Tracer les courbes de coût total, de coût moyen, de coût marginal, et de le coût moyen variable sur un autre graphique.
5. Quel est le niveau de production minimisant le coût moyen ? Déterminer graphiquement ce coût à partir de la courbe du coût total sans refaire de démonstration.