DS n°1 de mathématiques du semestre 2

Durée : 1h30mn

Documents interdits. Calculatrice non autorisée

Nom-Prénom : **groupe:**

1

Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = 2x^6 - 3x^4 + y^2 - 2y$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Vérifier que $(0;1)$ est un point critique de f. Déterminer les 3 points critiques de f.
2. Pour chacun des points critiques calculer le hessien. Déterminez, lorsque cela est possible , s'il s'agit d'un extremum local, d'un col .
3. Calculer $f(1;1)$ et $f(0;2)$. Est-ce que $f(0;1)$ est un extrema global?
4. (**) Déterminer le signe de $f(h,1) - f(0;1)$ pour h dans l'intervalle $]-1;1[$.
   Etudier le signe de $f(0;1+k) - f(0;1)$ pour k réel. Déduire si $f(0;1)$ est un extremum local ou rien.

.

2

Soit la fonction f définie par $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$

1. Déterminez les points critiques de f .
2. En utilisant le hessien, déterminez si ces points critiques sont des extrema locaux .
3. (*) Déterminer les équations des courbes de niveau dans les plans d'équations $z = 1$ et $z = -1$. . Reconnaître les équations de deux hyperboles dont on précisera les asymptotes .
4. (*) Représenter ces deux courbes de niveau avec leurs asymptotes dans un repère orthonormé.
5. Sur le schéma précédent de courbes de niveau , représenter le domaine fermé , borné D défini par:

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 1\}.$$

6. Trouver les extremas de la fonction f sur D

.

3

Soit la fonction f définie par $f(x;y) = 2xy$. On note (S) la surface représentative de f.

1. Ecrire l'équation du plan tangent à la surface (S) au point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ où $z_0 = f(x_0;y_0)$.
2. Donnez une valeur approchée de $f(1,05;0,99)$ grâce à l'approximation affine donnée par le plan tangent.
3. (*) Déterminer les points de (S) pour lesquels le plan tangent est parallèle au plan d'équation $-2x+20y+3z = 10$
4. Dans la suite, on veut trouver les extrema de f sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 8$
   (a) Déterminer l'équation de la courbe de niveau dans le plan d'équation $z = z_0$ (On distinguera le cas $z_0 \neq 0$ et $z_0 = 0$.
   (b) Faîtes un schéma de courbes de niveau. Représenter sur ce schéma la contrainte $4x^2 + y^2 = 8$ (Vous préciserez le nom de la courbe et ses éléments caractéristiques).
   Vous indiquerez les points extrema en précisant s'il s'agit de minima ou de maxima locaux (ou globaux).
   (c) Déterminer les éventuels extrema de f sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 8$ **à l'aide du multiplicateur de Lagrange**. (En expliquant pourquoi x et y ne peuvent égaux à 0, vous montrerez tout d'abord que $\dfrac{y}{4x} = \dfrac{x}{y}$ puis vous remplacerez dans la dernire équation de votre système).
   (d) Etudier la fonction f au voisinage du point critique $(1;2)$ pour dire si ce point est un minima local , ou un maxima local ou rien sous la contrainte .

.

.

4

Soit D une matrice diagonale dont les élements de la diagonale sont notés d_{ii} pour i de 1 à n. Soit A la matrice dont tous les coeffcients sont égaux à 1. Montrer que le produit DA est égal à :

$$DA = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{11} & \dots & d_{11} \\ d_{22} & \dots & d_{22} & \dots & d_{22} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{nn} & \dots & d_{nn} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^2; A^3; A^4$
2. Proposer une expression de A^n pour n entier naturel supérieur ou égal à 1.
   Démontrer votre résultat par récurrence.

.

6

Soit A et B deux matrices telles que $AB \neq 0_{n,n}$ et $BA = 0_{n,n}$.

1. Est-ce que A et B sont inversibles?
2. On note C la matrice $C = AB$. Calculer C^2 en justifiant toutes les étapes de vos calculs.

7

1. Montrer que la transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure .
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les matrices B telles que $BA = 0_{n,n}$.
2. Déterminer les matrices B telles que $BA = 0_{n,n}$ et $AB \neq 0_{n,n}$.