DS n°4 de mathématiques : contrôle terminal du semestre 1

Durée : 2h

Documents interdits. Calculatrice non autorisée

Nom-Prénom : **groupe:**

1

Etudier la fonction f définie par $f(x) = ln(e^{2x} - 1)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f : $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer la dérivée de f. Etudier son signe sur $\mathcal{D}_f$. (On rappelle que $(ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$).
3. Dresser le tableau de variations de f. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Compléter le tableau de variations.
4. Rechercher les asymptotes obliques. (On pensera à mettre e^{2x} en facteur).
5. Donner les équations de toutes les asymptotes.
6. Calculer l'abscisse du point d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
7. Préciser les valeurs de f et de sa dérivée au point trouvé à la question précédente.
8. Tracer l'allure du graphe de f dans un repère orthonomrmé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Valeur numérique: $\dfrac{ln2}{2} \simeq 0,35$)

.

2

Soit f la fonction numérique de deux variables définies par $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 4y^2 - 1}$. On note $\mathcal{D}_f$ son domaine de définition et (S) la surface représentant cette fonction,

1. Etudier la courbe d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$: Vous devrez indiquer sa nature et préciser ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer le domaine de définition de f : $\mathcal{D}_f$ et représenter $\mathcal{D}_f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Calculer les dérivées partielles de f d'ordre 1 en précisant leurs domaines de validité.
4. Déterminer une équation de la courbe de niveau de (S) dans le plan d'équation $z = \dfrac{1}{3}$. Indiquer la nature de cette courbe en précisant ses éléments caractéristiques et la construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
5. Calculer le vecteur gradient de f au point $(6; 2\sqrt{2})$. Représenter sa direction sur le schéma précédent. (Comment est ce vecteur par rapport à la tangente à la courbe en $(6; 2\sqrt{2})$?)
6. En déduire une équation de la tangente à la courbe de niveau au point de coordonnées $(6; 2\sqrt{2})$.

.

3

L'indice de satisfaction de deux biens A et B en fonction des prix unitaires x et y (en euro) de ces deux biens est donné par :

$$f(x,y) = 2.(2^x) - (ln2)^2xy + 70$$

On considère la surface S représentant cet indice.

1. Déterminer le domaine de définition de f : $\mathcal{D}_f$.

2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction f.

3. Ecrire l'équation de la courbe intersection de S et du plan d'équation $y = x$.
   Soit la fonction g définie par $g(x) = f(x;x)$. On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

   Calculer les dérivées d'ordre 1 et 2 de g. Etudier les variations de g' à l'aide du signe de g''. En déduire que g' est positive sur son domaine définition.

   Dresser le tableau de variations de g, calculer les limites aux bornes du tableau. Préciser les points d'inflexion, les asymptotes et/ou branches paraboliques de $\mathcal{C}_g$.

   Représenter l'allure de $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé. (Valeur numérique : $2ln(2) \simeq 1,4$).

   En déduire le prix du bien A pour lequel l'indice est minimal si $y = x$ et x dans $[0;5]$ et donner la valeur de cet indice.

4. **BONUS**

   (a) Montrez que l'équation de la courbe de niveau de f dans le plan d'équation $z = 70$ est $y = \dfrac{2}{(ln2)^2}\dfrac{2^x}{x}$.

   (b) On pose h définie par $h(x) = \dfrac{2}{(ln2)^2}\dfrac{2^x}{x}$. Déterminer le domaine de définition de h .
   Calculer la dérivée d'ordre 1 de h. Etudier les variations de h. Dresser le tableau de variations de h, calculer les limites aux bornes du tableau, et préciser les asymptotes et/ou branches paraboliques.

   (c) Représenter cette courbe de niveau dans un repère orthonormé. (Valeurs numériques : $\dfrac{1}{ln2} \simeq 1,44$; $\dfrac{2e}{ln(2)} \simeq 7,8$).

.

4

Les préférences d'un consommateur pour les biens 1 et 2 sont représentées par la fonction d'utilité suivante : $f(X,Y) = X^{\alpha}Y^{\beta}$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$. X est la quantité de bien 1 achetée et Y celle de bien 2 achetée.

On admettra que le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est un cône de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que, sur D, la fonction f est une fonction homogène dont vous préciserez le degré.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f
3. Vérifier la formule d'Euler pour la fonction f.
4. **On suppose pour toutes les questions qui suivent que $\alpha + \beta = 1$.**
   (a) Calculer le TMS de f au point de coordonnées $(2;2)$
   (b) Le budget de ce consommateur est noté B. P_X et P_Y désignent les prix respectifs d'une unité de bien 1 et d'une unité de bien 2. Ce consommateur épuise tout son budget dans l'achat de deux biens. Sous la contrainte budgétaire, il maximise son utilité au point de coordonnées $(2;2)$.
      i. Quel est le niveau d'utilité atteint au point de coordonnées $(2;2)$?
      ii. On sait que $P_X = 2$ et $P_Y = 1$. Quelle est la pente de la droite de budget ? A l'aide du TMS au point $(2;2)$, déterminer les valeurs de α et β. Calculer le budget du consommateur.
      iii. Pour $\alpha = \dfrac{2}{3}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$, déterminer l'équation de la courbe de niveau d'équation $Z = 2$ puis à l'aide de votre cours , sans refaire d'étude de fonction , représenter l'allure de cette courbe dans un repère orthonormé.
      iv. Suite à une hausse du prix du bien 1, le consommateur maximise son utilité avec 1 bien 1 et 1 bien 2.
      Le budget reste égal à 6 et $\alpha = \dfrac{2}{3}$ et $\beta = \dfrac{1}{3}$. A l'aide du TMS de f en $(1;1)$, trouvez les nouveaux prix des biens 1 et 2 .

.

5

1. Rappeler la limite de cours suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x}$.

2. Calculer
$$\lim_{X\to+\infty}(1+\frac{1}{X^{0,5}})^X$$
.