DS n°3 de mathématiques

Durée : 1 h30

Documents interdits. Calculatrice non autorisée

Nom-Prénom : **groupe:**

---

1 Limites

Calculer en justifiant soigneusement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+5}{x^3 \ln x}; \quad \lim_{x\to 0^+} (x^x - 2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{(x+2)x};$$

2 Fonctions exponentielles

Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (6,5)^x,\ g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g respectivement, dans un repère orthonormé.

1. Etudier les fonctions f et g (domaine de définition, calcul de la dérivée, tableau de variations, limites aux extrémités de l'ensemble de définition, asymptotes et branches paraboliques)
   Tracer leurs graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ avec leurs tangentes en $(0;1)$ dans un repère orthonormé .
   (Valeurs numériques: $ln(6,5) \simeq 2; ln(\frac{1}{5}) \simeq -1,5$)
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer une équation de la tangente D_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. (On n'utilisera pas de valeur approchée).
4. Calculer l'intégrale $R = \int_0^1 (f(x) - g(x))dx$. On demande la valeur exacte de cette intégrale.
5. Hachurer sur le dessin réalisé à la question 1 ce que cette intégrale représente .

.

.

3

Soit la fonction f définie par $f(x;y) = xln(x) + xy + 10$. On note S la surface d'équation $z = f(x;y)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f . Représenter ce domaine de définition dans le plan muni d'un repère orthonormé.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
3. Montrer que l'équation de la courbe de niveau de f dans le plan $z = 9$ s'écrit : $-ln(x) - \dfrac{1}{x} = y$.
4. On pose $h(x) = -ln(x) - \dfrac{1}{x}$.
   Etudier la fonction h ainsi définie : domaine de définition, dérivée d'ordre 1, dérivée d'ordre 2, tableau de variations,limites aux bornes du tableau, asymptotes , points d'inflexion et intervalles de convexité. Tracer l'allure de la courbe représentative de h dans un repère orthonormé. (Valeur numérique : $-ln(2) - \dfrac{1}{2} \simeq -1,2$)
5. Vérifier que , sous la contrainte $y = -3 + x$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$
6. Caculer la dérivée de g et vérifier que $g'(1) = 0$.
7. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum puis la valeur de y et la valeur de z qui correspondent.
   (On pensera à calculer la dérivée d'ordre 2 de g pour connaître le signe de la dérivée de g.)

.