DS n°2 de mathématiques

Durée : 1 h30

Documents interdits. Calculatrice non autorisée

Nom-Prénom : **groupe:**

1

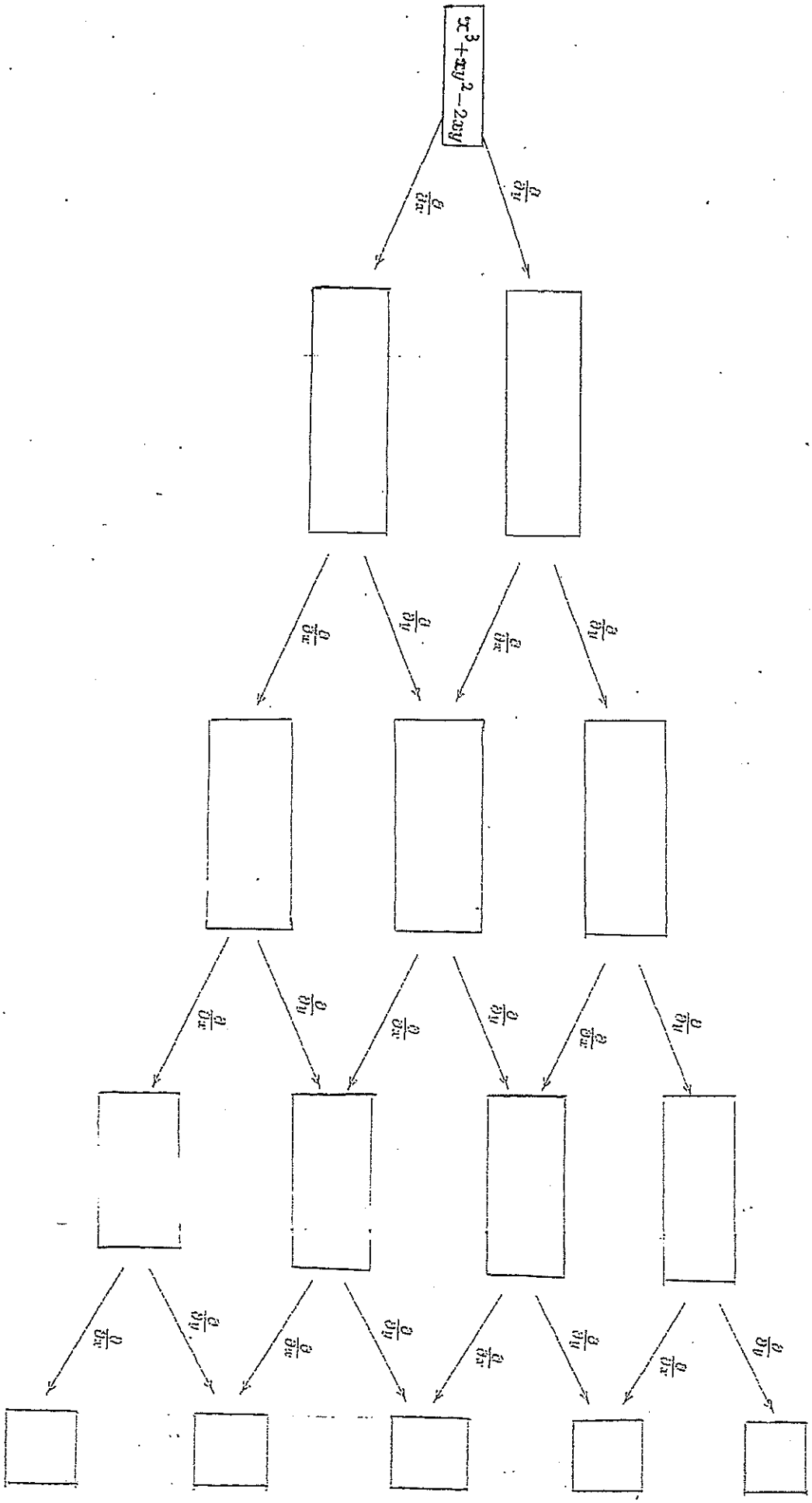
Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée de f . Vérifier que la dérivée seconde de f est $f''(x) = \frac{3-x}{4x^2\sqrt{x}}$.
3. Dresser le tableau de variations de f en indiquant les points d'inflexion , les intervalles de convexité et de concavité de f.
4. Calculer la limite de f à droite de 0. Que peut-on conclure pour le graphe de f?
5. Calculer la limte de f en $+\infty$. Déterminer si le graphe de f a une asymptote ou une branche parabolique en $+\infty$.
6. Représenter l'allure de f dans un repère orthonormé. (Données numériques : $\frac{1}{3\sqrt{3}} \simeq 0,2$)

Calculer les dérivées partielles de tous ordres de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 \quad + xy^2 - 2xy \ .$$

2



3

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x;y) = x^2 - 4y^2$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les fonctions dérivées partielles d'ordre 1 de f. Déterminer le vecteur gradient de f au point de coordonnées $(x;y)$.
3. Etudier la courbe de niveau de f dans le plan d'équation $z_0 = 3$: Equation, nature et éléments caractéristiques (asymptotes , sommets...).
4. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe de niveau de f dans le plan d'équation $z_0 = 3$. Données numériques : $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

   Vérifier que le point de coordonnées $(2; -\frac{1}{2})$ se trouve sur cette courbe.
5. Quelle est la nature de l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x + y = \frac{3}{2}$?
6. Représenter dans le repère de la question 4, la droite de contrainte d'équation $y = \frac{3}{2} - x$. Vérifier que le point de coordonnées $(2; -\frac{1}{2})$ appartient à cette droite.
7. Vérifier que , sous la contrainte $y = \frac{3}{2} - x$, z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$
8. Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un maximum puis la valeur de y et la valeur de z qui correspondent.
9. On note $(x_0; y_0)$ le point trouvé à la question précédente. Calculer le vecteur gradient en ce point.
10. Vérifier que le vecteur gradient en $(x_0; y_0)$ est orthogonal à la droite de contrainte.
11. **Question BONUS**
    Que peut-on en déduire pour la droite de contrainte par rapport à la courbe de niveau contenant $(x_0; y_0)$?

4

Soit f la fonction de deux variables définie par $f(x;y) = \dfrac{1}{4x^2+y^2-4}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Représenter le domaine de définition dans un repère orthonormé .
   Vous indiquerez clairement les éléments caractéristiques des courbes dont vous aurez besoin pour cette représentation.
3. Etudier la trace de f dans le plan d'équation $y = 0$: Vous chercherez le domaine de définition, la dérivée , le tableau de variation, les limites aux bornes du tableau de variation, les asymptotes.
4. Tracer l'allure de cette trace dans le plan (xOz) muni d'un repère orthonormé.