Université de Nice — L1MASS, année 2014-2015
Département de Mathématiques — Statistique
NOM : Date : .
PRENOM : Salle : .

Feuille-réponse 7
Introduction à la méthode de Monte-Carlo

Exercice 1 : Calcul de π par une méthode de Monte-Carlo

1. La fonction `runif(n,0,1)` renvoie un échantillon (de taille n) de nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Essayez avec $n = 100$ puis avec $n = 1.000$ et tracer les deux histogrammes (avec `hist(....)`). Qu'observez-vous ?

2. Quelle est la loi de l'échantillon X obtenu avec `X<-2*runif(n)-1` ? Comparez avec `X1<-runif(n,-1,1)` : y a-t-il une différence entre `X` et `X1` ? Qu'y a-t-l en commun ? (Indication : vous pouvez observer `hist(X)` et `hist(X1)`)

3. Expliquer ce que sont les nombres $X[1]$ et X[n] ? Quelles valeurs obtenez-vous ?

4. Créer deux échantillons X et Y de $n = 1.000$ nombres aléatoires uniformément répartis dans l'intervalle $[-1, +1]$ et tracer les 1.000 points du plan de coordonnée (X, Y). Qu'observez-vous ?

5. Que représente l'entier calculé par les deux instructions suivantes ?
```
r2 = X^2+Y^2
sum(r2<1)
```

6. Déduire une estimation du nombre π. Recommencer avec d'autres échantillons et indiquer les différentes valeurs obtenues pour π.

7. Recommencez avec un échantillon de taille $n = 10.000$ (et non plus $n = 1.000$). Qu'observez-vous ?

Exercice 2 : Propriété de l'estimateur de π

1. Afin d'étudier les propriétés de cet estimateur de π, construire un vecteur noté Pi dont les composantes sont 400 estimations du nombres π puis tracer l'histogramme de ce vecteur. On choisira des échantillons de taille $n = 10.000$. Qu'obtenez-vous ?

2. Quelle est, en théorie, la moyenne et l'écart-type, d'un tel échantillon ?

3. Quelle est la moyenne et l'écart type de votre échantillon. Comparer avec la valeur théorique trouvée à la question précédente.

4. Le code suivant permet de comparer la distribution empirique de cet estimateur avec une approximation gaussienne :

```
K=400;Pi=numeric(K);N=10000
for (k in 1:K)
{X=runif(N,-1,1);Y=runif(N,-1,1)
r2=X^2+Y^2
Pi[k]=4*sum(r2<1)/N
}
hist(Pi,freq=FALSE)
curve(dnorm(x,mean(Pi),sd(Pi)), add=TRUE)
```

   Expliquer ce code (pourquoi l'option freq=FALSE ?) et commenter le résultat obtenu.