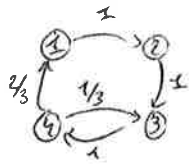
L2 Mass – "Markov & Martingales"   Interrogation 2   21 Mai 2014

I On considère la chaîne de Markov (X_n) décrite par le graphe



1) Expliciter la matrice P des proba de transition.

Quel est le graphe de la chaîne de Markov (Y_n) associée à la matrice P^2 ? Peut on écrire (Y_n) en fonction de (X_n) ?

La suite $(P^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge t'elle ? Si oui quelle est sa limite ?

La suite $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge t'elle ? Comment se comporte P^n pour n grand ?

2) Quelles sont les mesures stationnaires de (Y_n) ?

3) On note T_{ij} le temps de premier passage à l'état j venant de l'état i pour la chaîne (X_n)

Comment s'exprime l'événement $T_{ij}=n$ en fonction des événements liés aux X_k conditionnés à $X_0=i$?

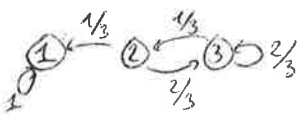
Comment s'exprime le temps moyen de premier passage en j venant de i ?

4) Calculer les espérances $E(T_{13})$, $E(T_{33})$, $E(T_{31})$. On pourra utiliser la formule

$E(T_{ii})=\frac{1}{\mu_s(i)}$ lorsque la chaîne de Markov est irréductible, où μ_s désigne alors la mesure stationnaire.

Comment se comparent ces espérances avec les mêmes espérances pour la chaîne (Y_n) ?

II 1) On considère la chaîne de Markov (X_n) de graphe



On suppose $X_0=2$

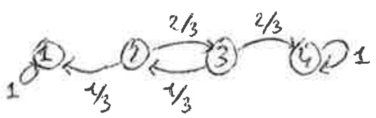
On note T le temps de premier passage à l'état 1

Donner une expression pour l'espérance $E(T)$. Pouvez vous calculer $E(T)$ avec cette expression ?

Calculer $E(T)$ en se ramenant à une chaîne de Markov irréductible pour laquelle on a la formule

$$E(\text{temps de premier retour en } i \mid X_0=i)=\frac{1}{\mu_s(i)}$$ où μ_s est la mesure stationnaire

2) Soit maintenant (Y_n) de graphe



Que vaut $E(1^{er}\text{ passage en } 1 \mid X_0=2)$?

Que vaut $E(1^{er}\text{ passage en } 1 \text{ ou en } 4 \mid X_0=2)$?

L 2 Markov Corrigé de l'interrogation du 21 mai 2014

I 1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

P est la matrice des proba de transition $P(X_{n+1}=i \mid X_n=j)$, alors $P^2 = \big(P(X_{n+2}=i \mid X_n=j)\big)_{i,j}$ donc $Y_n = X_{2n}$ a bien pour matrice P^2. Plutôt que de calculer P^2 on peut dessiner le graphe de (Y_n) : on a une arête $i \to j$ avec un poids p si $P(X_{n+2}=j \mid X_0=i) = p > 0$ d'où :

$$\begin{tikzcd} ① \arrow[r, bend left, "1"] & ③ \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[loop right, "1/3"] \end{tikzcd} \qquad \text{d'où } P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} ② \arrow[r, bend left, "1"] & ④ \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[loop right, "1/3"] \end{tikzcd}$$

Conditionné à $Y_0 \in \{1,3\}$ (Y_n) est de graphe $\begin{tikzcd} ① \arrow[r, bend left, "1"] & ③ \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[loop right, "1/3"] \end{tikzcd}$ donc de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ lorsqu'on renumérote ③ en ②

cette ~~[illegible]~~ matrice est régulière car $\forall i,j \in \{1,3\}$, $\exists\, i \rightsquigarrow j$ et pgcd$\{$longueurs $3 \rightsquigarrow 3\} = 1$

donc $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \big([p] \ [p]\big)$ où $p = (p_1, p_2)$ vérifie $p_1 = \frac{2}{3} p_2$ et $p_1 + p_2 = 1$ donc $(p_1,p_2) = (2/5\,;\,3/5)$

on obtient $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n = i \mid Y_0 = j)\Big)_{i,j\in\{1,3\}} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

De même (Y_n) conditionné à $Y_0 \in \{2,4\}$ est de graphe $\begin{tikzcd} ② \arrow[r, bend left, "1"] & ④ \arrow[l, bend left, "2/3"] \arrow[loop right, "1/3"] \end{tikzcd}$ donc de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$ après renumérotation ②$\leftrightarrow$① ④$\leftrightarrow$②

donc à nouveau $\Big(\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n = i \mid Y_0 = j)\Big)_{i,j\in\{2,4\}} = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$

On a $P(Y_n = i \mid Y_0 = j) = 0$ si $i \in \{1,3\}$ et $j \in \{2,4\}$ ou inversement

Conclusion $\lim\limits_{n\to\infty} P^{2n} = \Big(\lim\limits_{n\to\infty} P(Y_n=i \mid Y_0=j)\Big)_{i,j} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 3/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$ qu'on note $P^{2\infty}$

Rq On peut renuméroter ①, ②, ③, ④ ~~com~~ par 1, 3, 2, 4 dans l'ordre. Avec cette nouvelle numérotation des états la matrice de (Y_n) est $Q = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2/3 & & \\ 1 & 1/3 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 0 & 2/3 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 1/3 \end{array}\right)$ diagonale par bloc. On a vu $\begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 \\ 3/5 & 3/5 \end{pmatrix}$ donc

$Q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2/5 & 2/5 & & \\ 3/5 & 3/5 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 2/5 & 2/5 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 3/5 & 3/5 \end{array}\right)$. En revenant à la numérotation de départ on retrouve $\lim\limits_{n\to\infty} P^{2n}$

$P^{2n+1} = P^{2n} P \xrightarrow[n\to\infty]{} P^{2\infty} P = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 3/5 \\ 3/5 & 0 & 3/5 & 0 \end{pmatrix} \neq P^{2\infty}$ donc la suite (P^n) ne converge pas

Soit (Π_n) la suite de matrices définie par $\Pi_n = P^{2\infty}$ si n est pair, $\Pi_n = P^{2\infty} P$ si n est impair, alors $P^n = \Pi_n + \underbrace{o_{n\to\infty}(1)}_{\text{matrice tendant vers 0 qd } n\to\infty}$

I 2) On cherche $\rho = (\rho_1, -, \rho_4)$ mesure de proba vérifiant $P^2[\rho] = [\rho]$ ce qui équivaut à $\begin{cases} \rho_i \geq 0 \\ \rho_1 + \dots + \rho_4 = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \end{cases}$

d'après les calculs de I 1 on a $\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$, $(\lambda_1 \geq 0)$ et $\begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_4 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$, $(\lambda_2 \geq 0)$

$\rho_1 + \dots + \rho_4 = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$. $\rho_1, -, \rho_4 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Conclusion les mesures de proba stationnaires sont les $(\lambda\, 2/5, (1-\lambda)\, 2/5, \lambda\, 3/5, (1-\lambda)\, 3/5)$, $\lambda \in [0,1]$

I 3) ~~Vénus~~ Conditionnellement à $X_0 = i$, l'évènement "$T_{ij} = n$" est l'évènement "$X_n = j$ et $X_{n-1} \neq j$ et ... et $X_1 \neq j$"

le temps moyen de 1er passage en j venant de i est l'espérance conditionnelle $E(T_{ij} \mid X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} n\, P(X_n = j \text{ et } X_{n-1} \neq j \dots \text{ et } X_1 \neq j \mid X_0 = i)$

On peut aller plus loin dans le calcul mais nous ne le faisons pas.

I 4) $T_{13} = 2$ avec proba 1 ~~donc~~ $\left(P(X_2 = 3 \text{ et } X_1 \neq 3 \mid X_0 = 1) = 1 \right)$ donc $E(T_{13}) = 2 \times 1 = 2$

$T_{33} = 2$ avec proba $1/3$ correspondant au chemin $3 \to 4 \to 3$
$= 4$ —— $2/3$ —— $3 \to 4 \to 1 \to 2 \to 3$

donc $E(T_{33}) = 2 \times 1/3 + 4 \times 2/3 = \frac{10}{3}$

On peut égal^t observer que (X_n) est irréductible $(\forall i,j \;\; i \leftrightarrow j)$, chercher la mesure stationnaire ρ_s et appliquer la formule $E(T_{33}) = \frac{1}{\rho_s(3)}$. On observe que $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} P \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est invariante par P puisque $\begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est invariante par P^2, et c'est une mesure de proba. $P \begin{pmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \rho_s = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 3/10 \\ 3/10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow E(T_{33}) = \frac{10}{3}$

On a $T_{11} = T_{13} + T_{31}$ donc $\underbrace{E(T_{11})}_{1/\rho_s(1) = 5} = \underbrace{E(T_{13})}_{2} + E(T_{31})$ donc $E(T_{31}) = 3$

Rq $T_{31} = 2 + 2k$ avec proba $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k$ correspondant au chemin $\underbrace{3 \to 4 \to 3 \to \dots \to 4 \to 3}_{3 \to 4 \to 3 \text{ répété } k \text{ fois}} \to 4 \to 1$

donc $E(T_{31}) = \sum_{k \geq 0} (2+2k)\, 2/3 \times (1/3)^k = \frac{4}{3} \sum_{k \geq 0} (1+k) (1/3)^k = \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\sum_{k \geq 0} x^{k+1} \right)\Big|_{x = \frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{3}} = 3$

$Y_n = X_{2n}$ $\quad T_{13}(Y_n) = T_{13}(X_n)/2$, de même pour T_{33}, T_{11}, T_{31} mais $T_{12}(Y_n) = 0 \neq T_{12}(X_n)$

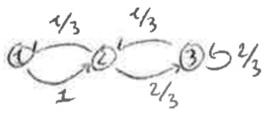
II 1) Soit ω un chemin ② $\to$ ① passant une seule fois par 1. ω est déterminé par le nombre k de boucle ②$\to$③$\to$②, le nombre ℓ de boucle ③↺ et la position des boucles ③↺ dans ω. On a $k \geq 0$, $\ell \geq 0$, $\ell \geq 1 \Rightarrow k \geq 1$. Pour k, ℓ fixés il y a $\binom{k+\ell}{k} = \frac{(k+\ell)!}{k!\,\ell!}$ positions possibles pour les boucles ③↺.

On a $P(\omega) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{2}{3}\right)^\ell$, $T(\omega) = \text{longueur}(\omega) = 1 + 2k + \ell$

$$E(T) = \sum_\omega T(\omega) \times P(\omega) = \sum_{\substack{k,\ell \geq 0 \\ \ell > 0 \Rightarrow k > 0}} (1 + 2k + \ell) \binom{k+\ell}{k} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^\ell$$

On ne calcule pas plus loin

Soit (X'_n) la chaîne de Markov de graphe



avec $X'_0 = 2$. On a $T' = T$

$T'_{11} = T'_{12} + T'_{21} = 1 + T$

Or (X'_n) est irréductible donc $E(T'_{11}) = \frac{1}{\pi'_s(1)}$ où π'_s est l'unique mesure de proba stationnaire pour (X'_n)

On détermine $\pi'_s = (x,y,z)$: $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \frac{1}{3} y = x \\ x + \frac{1}{3} z = y \\ \frac{2}{3} x + \frac{2}{3} y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \iff (x,y,z) = \left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{6}{10}\right)$

$\frac{1}{\pi'_s(1)} = 10 = 1 + E(T)$ donc $E(T) = 9$

II 2) $P(\forall n, Y_n \neq 1 \mid Y_0 = 2) \underbrace{\geq}_{\text{en fait } =} P(\exists n, Y_n = 4 \mid X_0 = 2) \geq P(Y_2 = 4 \mid Y_0 = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} > 0$

$E(T_{21}) \geq \infty \times P(\forall n, Y_n \neq 1 \mid Y_0 = 2) = \infty$

Soit (Y'_n) la chaîne de Markov de graphe

On a $E(\text{1er passage de } Y_n \text{ en 1 ou en 4} \mid Y_0 = 2) = E(T'_{2,1-4}) = E(T'_{1-4,1-4}) - 1$

(Y'_n) est irréductible de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$ après numérotation ①-④ $\leftrightarrow$ 1
② $\leftrightarrow$ 2
③ $\leftrightarrow$ 3

On détermine $\pi'_s = \left(\frac{7}{22}, \frac{9}{22}, \frac{6}{22}\right)$ puis $E(T'_{1-4,1-4}) = \frac{1}{\pi'_s(1)} = \frac{22}{7}$

$E(T'_{2,1-4}) = \frac{22}{7} - 1 = \frac{15}{7}$