L2 Maths - Option Markov & Martingales - Interrogation 21 Mars 2014

durée 1 H sans document

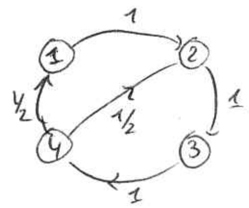
I On dispose ~~deux~~ deux boites contenant chacune un certain nombre de boules blanches et de boules rouges. A chaque étape on choisit au hasard une boite (de façon équiprobable) puis on prend une boule au hasard dans cette boîte ~~que~~ et on la place dans l'autre (si la boite est vide il ne se passe rien)

1) Initialement il y a une boule rouge dans la première boîte et une boule blanche dans la seconde. Modéliser le processus comme une chaîne de Markov et donner la matrice des probabilités de transition. ~~Quel~~ Quel est à long terme la probabilité ~~que~~ d'avoir deux boules dans la première boite ?

2) Mêmes questions si initialement il y a deux boules rouges dans la première boîte et une boule blanche dans la seconde

Les différents états sont ils équiprobables à long termes ?

II 1) On considère la chaîne de Markov décrite par le graphe suivant :



Donner la matrice des probabilités de transition. Est elle régulière ? Pouvez vous calculer $\lim_{n\to\infty} P^n$?

On note X_n l'état du processus au temps n. Calculer la probabilité que $X_5 = 3$ sachant $X_0 = 1$

Calculer la probabilité que $X_{14} = 3$ sachant $X_0 = 1$

Supposons qu'on ait $X_n = 1$ avec proba $\frac{1}{3}$ et $X_n = 2$ avec proba $2/3$ quelle est la probabilité que $X_{n+12} = 3$?

2) On considère maintenant la chaîne de Markov associée à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Q est elle régulière ?

On note $1, 2, \dots, 5$ les états du processus de sorte que $Q_{ij} = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)$

Calculer ~~$P(X_n$~~ $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2 \mid X_0 = k)$ pour $k = 1, 2, \dots, 5$.

Calculer $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = k)$ pour $k = 2$ puis pour $k = 1, 3, 4, 5$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} Q^n$?