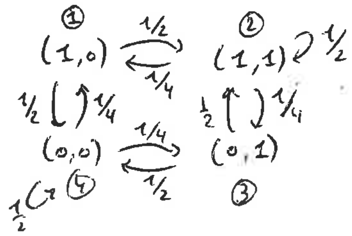
L2 Markov Corrigé de l'interrogation du 21 Mars 2014

I 1) Etat décrit par le couple (nbre de boules rouges dans la 1ère boîte, nbre de boules blanches ds la 1ère boîte)

⇝ état initial $(1,0)$

graphe :



Matrice des proba de transition $\left(P(ⓙ \to ⓘ)\right)_{i,j}$ avec la numérotation choisie des états :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Deux boules dans la 1ère boîte correspond à l'état ②. On cherche $\lim_{n\to\infty} P(X_n = ② \mid X_0 = ①) = \lim_{n\to\infty} (M^n)_{2,1}$

On observe que M est régulière : - $\forall\, i,j$ il existe un chemin de ⓘ à ⓙ

- il existe un chemin de longueur 1 de ② à ② donc pgcd (longueurs des chemins $i \to i$) $= 1$

On sait alors (Thm de Perron-Frobenius) que $\lim_{n\to\infty} M^n = ([\mu] \cdots [\mu])$ où $[\mu]$ est le vecteur colonne des coordonnées de l'unique mesure de proba stationnaire (ou invariante)

$[\mu]$ vérifie $M[\mu] = [\mu]$. On résoud

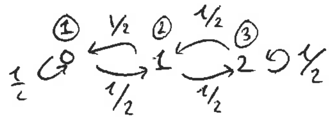
$$\begin{cases} \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_4 = \mu_1 \\ \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3 = \mu_2 \\ \frac{1}{4}\mu_2 + \frac{1}{4}\mu_4 = \mu_3 \\ \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_3 + \frac{1}{2}\mu_4 = \mu_4 \end{cases}$$

On trouve $(\mu_1, -, \mu_4) = \mu_1(1,2,1,2)$.

On doit avoir $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 1$ d'où $(\mu_i) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} (M^n)_{2,1} = \left(\lim_{n\to\infty} M^n\right)_{2,1} = \left([\mu] - [\mu]\right)_{2,1} = \mu_2 = \frac{1}{3}$$

Autre modèle : nbre de boules dans la 1ère boîte ⇝ état initial 1

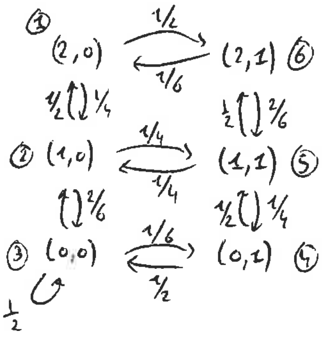


$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. On observe que M est régulière comme ci-dessus donc $\lim_{n\to\infty} M^n = ([\mu][\mu][\mu])$ avec μ mesure de proba stationnaire.

On cherche (x,y,z) tq $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $x+y+z = 1$. On trouve $x = y = z = \frac{1}{3}$

On a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = ③ \mid X_0 = ②) = \mu_3 = \frac{1}{3}$

2) Etats $(n_{Rouge}, n_{Blanche})$ ⇝



$$\rightsquigarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \overset{\mu =}{\rightsquigarrow} \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$$

Mesure stationnaire.

Π est régulière et $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=i\,|\,X_0=j) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \Pi^n\right)_{i,j} = \mu_i$, cf 1)

2 boules dans la 1ère boîte correspond à l'état ① ou à l'état ⑤. $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=①\text{ ou }⑤\,|\,X_0=①) = \lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=①|X_0=①)+P(X_n=⑤|X_0=①)$

$= \mu_1+\mu_5 = \frac{1}{12}+\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

Autre modèle : nbre de boules dans la 1ère boîte $\tfrac12 \circlearrowright \underset{①}{0} \underset{1/2}{\overset{1/2}{\rightleftarrows}} \underset{②}{1} \underset{1/2}{\overset{1/2}{\rightleftarrows}} \underset{③}{2} \underset{1/2}{\overset{1/2}{\rightleftarrows}} \underset{④}{3} \circlearrowleft \tfrac12$ état initial : ③

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mu = \left(\tfrac14, \tfrac14, \tfrac14, \tfrac14\right)$$

Π est régulière ($\forall\, i,j$ $\exists$ chemin $i \rightsquigarrow j$ et $\exists$ chemin de longueur 1 de ① à ① donc pgcd{longueurs des chemins ①$\rightsquigarrow$①} = 1) donc $\lim P(X_n=③\,|\,X_0=③) = \mu_3 = \frac14$

Avec la deuxième modélisation les états sont équiprobables à long terme. Avec la première ce n'est pas le cas.

II 1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ P est régulière car $\begin{cases} \cdot\ \forall\, i,j\ \exists \text{ chemin de } ⓘ \text{ à } ⓙ \\ \cdot\ \{\text{longueurs chemins } ② \rightsquigarrow ②\} = \{3,4,\dots\} \quad \text{pgcd}\{3,4\} = 1 \end{cases}$

On en déduit $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \left([\mu] \cdots [\mu]\right)$ où μ est l'unique mesure stationnaire.

posons $\mu = (x,y,z,t)$. $P[\mu] = [\mu] \iff \begin{cases} \frac12 t = x \\ x + \frac12 t = y \\ y = z \\ z = t \end{cases} \iff (x,y,z,t) = t\left(\frac12, 1, 1, 1\right)$ $t = \frac27$ pour que μ soit une mesure de proba $\rightsquigarrow \mu = \left(\frac17, \frac27, \frac27, \frac27\right)$ puis $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

Un seul chemin de longueur 5 de ① à ③ : ① → ② → ③ → ④ → ② → ③ de proba $1 \times 1 \times 1 \times \frac12 \times 1 = \frac12$ donc $P(X_5 = 3\,|\,X_0 = 1) = \frac12$

Chemins de longueur 14 de ① à ③ : ① → ② → ③ suivi d'un chemin de longueur 12 de ③ à ③

les chemins ③ $\rightsquigarrow$ ③ sont formés de boucles ③ → ④ → ② → ③ de longueur 3, de proba $\frac12$ et de boucle ③ → ④ → ① → ② → ③ de longueur 4 de proba $\frac12$. Un chemin ③ $\rightsquigarrow$ ③ de longueur 12 est ~~soit~~ formé soit de 3 boucles de longueur 4, la proba d'un tel chemin est $\left(\frac12\right)^3$, soit de 4 boucles de longueur 3, la proba d'un tel chemin est $\left(\frac12\right)^4$.

Conclusion : $P(X_{14} = 3\,|\,X_0 = 1) = \left(\frac12\right)^3 + \left(\frac12\right)^4 = \frac{3}{16}$

On suppose maintenant $P(X_n = 1) = \frac13$; $P(X_n = 2) = \frac23$. On a $P(X_{n+12} = 3) = P(X_{n+12} = 3\,|\,X_n = 1) \times P(X_n = 1) + P(X_{n+12} = 3\,|\,X_n = 2) \times P(X_n = 2)$

$$P(X_{n+12} = 3) = \frac13 \sum_{\substack{\omega : ① \rightsquigarrow ③ \\ \text{de long. } 12}} P(\omega) + \frac23 \sum_{\substack{\omega : ② \rightsquigarrow ③ \\ \text{de long. } 12}} P(\omega)$$

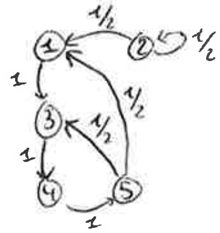
(II 1) - les chemins de ① à ③ de longueur 12 sont de la forme ① → ② → ③ suivi de boucles ③ ⇝ ③ de longueur 3 ou ③ ⇝ ③ de longueur 4, forcément deux boucles de long. 3 et une boucle de long. 4, celle ci étant au début, au milieu ou à la fin. Il y a donc 3 chemins de longueur 10 de ③ à ③, chacuns de proba $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

- les chemins de ② à ③ de longueur 12 sont de la forme ① → ③ suivi forcément de deux boucles ③ ⇝ ③ de long. 4 et d'une boucle ③ ⇝ ③ de long. 3, celle-ci étant au début, au milieu ou à la fin ce qui fait trois chemins chacuns de proba $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

On obtient $P(X_{n+12}=3) = \frac{1}{3} \times 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \times 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

Rq Avec une "calculatrice de matrice" on calculerait $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{12} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dont on retiendrait la troisième composante.

II 2) Le graphe associé à Q est



L'état ② est transitoire donc Q n'est pas régulière.

Pour $k = 1, 3, 4, 5$ $P(X_n = 2 | X_0 = k) = 0$ car il n'y a pas de chemin ⓚ ⇝ ②

Pour $k = 2$ le seul chemin ② ⇝ ② de longueur n est ② → ② → ... → ② de proba $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $P(X_n=2 | X_0 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Si $X_0 \in \{1, 3, 4, 5\}$, (X_n) est la chaîne de Markov considérée en (1) avec la renumérotation $1 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 3$, $5 \leftrightarrow 4$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 1 | X_0 = k) = \Gamma_1 = \frac{1}{7}$ avec les notations du (1), pour $k = 1, 3, 4, 5$

Si $X_0 = 2$ on sait $X_n \in \{1, 3, 4, 5\}$ avec proba $1 - P(X_n = 2) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

On conditionne : $P(X_n = 1 | X_0 = 2) = P(X_n = 1 | X_m \neq 2 \text{ et } X_0 = 2) \times P(X_m \neq 2 | X_0 = 2) + P(X_n = 1 | X_m = 2 \text{ et } X_0 = 2) \times P(X_m = 2 | X_0 = 2)$

pour $m \leq n$ fixé

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 | X_0 = 2) = \lim_{m\to\infty}\Big(\underbrace{P(X_n=1 | X_m \neq 2 \text{ et } X_0 = 2)}_{\substack{\xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma_1 \\ m \text{ fixé}}} \times \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^m\right)}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 1} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{P(X_n = 1 | X_m = 2 \text{ et } X_0 = 2)}_{\in [0,1]} \times \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^m}_{\xrightarrow[m\to\infty]{} 0}\Big)$$

$$= \Gamma_1 = \frac{1}{7}$$

On montre de même $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = i | X_0 = k) = \Gamma_{i-1} = \frac{2}{7}$ pour $i = 3, 4, 5$, $k \neq 2$ et $k = 2$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = i | X_0 = k) = \lim\limits_{n\to\infty} (Q^n)_{i,k}$ donc $Q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \\ 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}$