Licence L2 EG - Math3 **feuille 1** **24 septembre 2018**

Thème : comportement asymptotique des suites numériques

Pas de calculatrice ou équivalent pendant le TD.

[Cours.] **Définition.** limite +oo d'une fonction en 0, en +oo, limite 0 en 0, en +oo, limite l en 0, en +oo

Exercice. Adapter la déf. pour une suite

[Cours.] Fonctions de référence : exp, log, $x \mapsto x^\alpha$:

exp est définie sur $\mathbb{R}$ entier, à valeurs dans]0,+oo[, exp(0)=1, exp'=exp,

Exercice. $\exp(x+y) =?$, $\exp(-x) =?$

Conséquences : exp est strictement croissante, $\exp(x) > 1+x$ si $x > 0$, exp tend vers $+\infty$ en $+\infty$, tend vers 0 en $-\infty$, convexe, direction asymptotique verticale en $+\infty$. Ceci décrit en mots l'allure du graphe

exp est une bijection $]-\infty, +\infty[\to]0, +\infty[$, sa réciproque est notée log.

Exercice. Que vaut log(1) ? $\log(e)$? log(0) ?

Exercice. Allure du graphe de log ? justifier ($\log' =?$, etc.). Lien géométrique entre graphe de exp et graphe de log.

Définition. $x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))$

Conséquences : limites en 0, en $+\infty$, dérivée, allure du graphe suivant α (On utilise $x^\alpha = x \times x^{\alpha-1}$ pour $\alpha > 1$ et $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ est la réciproque de $\mapsto x^\alpha$.)

On retient l'allure des graphes des fonctions de référence.

Exercice. Que vaut $(x^\alpha x^\beta)/x^\gamma$, $(x^\alpha)^\beta$?

Exercice. Que vaut $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$?

Exercice. Calculer un encadrement à 1/10 près de $2^{\frac{1}{2}}$

[Cours.] Suite bornée : on écrit $u_n = O_{n\to+\infty}(1)$ ("Grand O").

Convergence vers 0 d'une suite :

Exercice. Trouver un n puis le premier n à partir duquel $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{100}$, à partir duquel $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1000}$.

Pour prouver la convergence vers 0, on utilisera le **1er thm de comparaison :** $u_n = O(1)/n^\alpha$ avec $\alpha > 0$ alors (u_n) converge vers 0.

Exercice. On suppose $n^\alpha = O(1)u_n$ avec $\alpha > 0$; que peut on dire de la limite de u_n ?

Exercice. On suppose (u_n) converge vers 0 ; montrer $1 + u_n = O(1)$, $\frac{1}{1+u_n} = O(1)$. Que peut on dire de $\frac{a}{b+u_n}$ (où a, b sont des réels fixés) ?

Exercice. Montrer que $\frac{n^2-1}{1+n-2n^3}$ converge vers 0 (factoriser numérateur et dénominateur par le terme dominant)

2ème théorème de comparaison : On suppose u_n/n^α admet la limite l en $+\infty$. Que dire de la limite de (u_n) ?

Si l est non nul, on dit que u_n est équivalent à ln^α en $+\infty$.

On admet $\log(n)/n^\alpha$, $n^\alpha/\exp(n)$ convergent vers 0 si $\alpha > 0$.

Exercice. Que peut on dire de $n^\alpha/\log(n)$?

[Cours.] Utilisation des DL en 0

Exercice. Quel est de développement limité de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 1 en 0 ? Quelle est la forme du reste ? En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

L2EG math3 -- 2018-2019

Questions types pour la première interrogation.

Limites de suites données par leur terme général

Question de cours. Quelle est la limite quand $x \to +\infty$ de $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$?

Réponse. $\sqrt{x}$ étant dominant devant $\ln(x)$ au voisinage de $+\infty$, la limite est $+\infty$.

Question de cours. Quelle est la limite de la suite (n^α) suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$?

Réponse. $+\infty$ si $\alpha > 0$, 1 si $\alpha = 0$, 0 si $\alpha < 0$.

Exercice. On pose $u_n = (2n + 3n^2)^{\frac{1}{3}} - (n+1)^{\frac{1}{3}}$.

Trouver a et α tel que u_n s'écrive $a \times n^\alpha \times (1 + \epsilon_n)$ avec $\lim \epsilon_n = 0$. Quelle est la limite de (u_n) ?

Réponse. $(2n + 3n^2)^{\frac{1}{3}} = \left(3n^2(2/(3n) + 1)\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} \times (1 + 2/(3n))^{\frac{1}{3}}$ or $(1 + 2/(3n))^{\frac{1}{3}}$ tend vers 1.

$(n+1)^{\frac{1}{3}} = \left(n(1 + 1/n)\right)^{\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}} \times (1 + 1/n)^{\frac{1}{3}}$ et $(1 + 1/n)^{\frac{1}{3}}$ tend vers 1.

Le terme dominant de la différence est $3^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}$, qu'on met en facteur :

$u_n = 3^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} \times \left((1 + 2/(3n))^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}/(3^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}) \times (1 + 1/n)^{\frac{1}{3}}\right)$

Le terme dans la grande paranthèse tend vers 1 donc s'écrit $1 + \epsilon_n$ avec ϵ_n qui tend vers 0.

$n^{\frac{2}{3}}$ tend vers $+\infty$ donc u_n tend vers $+\infty$.

Exercice. Quelle est la limite de la suite de terme général

$$\frac{n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{5}}} ?$$

Réponse. $n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{4}} = n^{\frac{1}{3}}(1 + n^{\frac{1}{4}}/n^{\frac{1}{3}}) = n^{\frac{1}{3}}(1 + n^{-\frac{1}{12}})$. Le terme dans la parenthèse tend vers 1.

De même $n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{5}} = n^{\frac{1}{2}}(1 + n^{-\frac{3}{10}})$ et le terme dans la paranthèse tend vers 1.

Le quotient vaut donc $n^{-\frac{1}{6}}$ fois le quotient de deux termes qui tendent vers 1, donc le quotient tend vers 0.

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Question de cours. Qu'est qu'un point fixe attractif d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Réponse. Un nombre x vérifiant $f(x) = x$ et $|f'(x)| < 1$ (ou encore $-1 < f'(x) < 1$).

Question de cours. Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[-1,2]$ vérifiant $|f'| < \frac{2}{3}$ sur $[-1,2]$. Quelle majoration du taux d'accroissement $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}|$ en déduit on pour $x, y \in [-1,2]$?

Réponse. D'après le théorème des accroissements finis (ou théorème de Rolle) on a $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$ pour un c entre x et y donc dans $[-1,2]$. On a $|f'(c)| < \frac{2}{3}$ donc $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| < \frac{2}{3}$.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (u_n) une suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Que peut on dire de $f(l)$?

Réponse. $f(l) = l$ (autrement dit l est un point fixe de f).

Exercice. On pose $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

a. Quel est le tableau de variation de f ? Quel est le tableau de signe de $x \mapsto f(x) - x$?

b. Pour quelles valeurs de x a t-on $|f'(x)| < 1$?

c. On définit (u_n) par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence qu'on a $\frac{1}{4} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ pour tout n. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$

d. On définit (u_n) par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence qu'on a $1 < u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n. Que peut on dire de $\lim u_n$?

Réponse.

a. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = 2x - \frac{1}{2}$.

$f'(x)$ s'annule en $\frac{1}{4}$, est strictement négatif sur $]-\infty, \frac{1}{4}]$ et strictement positif sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{4}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$. $f(\frac{1}{4}) = \frac{7}{16}$, $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$ (le terme x^2 domine au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$).

$f(x) - x = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ est un polynôme de degré 2 ; on peut calculer les points d'annulation :

$\triangle = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$, $x_0 = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})/2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})/2 = 1$, en dehors de l'intervalle $[x_0, x_1]$ $f(x) - x$ est du signe de x^2 donc positif ; $f(x) - x$ est du signe opposé à x^2 donc négatif sur $[x_0, x_1]$.

Rq : Le tableau de variation de $x \mapsto f(x) - x$ indiquerait que f est négative sur un intervalle contenant $\frac{3}{4}$ et positive en dehors de cet intervalle.

b. $|f'(x)| < 1 \Leftrightarrow -1 < f'(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x - \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$

c. On a $f(u_0) = f(\frac{1}{4}) = \frac{7}{16}$ qui est bien compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ donc l'énoncé $\frac{1}{4} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ est vrai pour $n = 0$.

Supposons l'énoncé vrai pour n et montrons le pour $n+1$: comme f est croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, +\infty[$ et $u_n, u_{n+1}, \frac{1}{2} \in [\frac{1}{4}, +\infty[$ on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ et d'autre part $\frac{1}{4} \leq u_{n+1}$ par hypothèse de récurrence de sorte qu'on a l'énoncé pour $n+1$. On en déduit par récurrence que l'énoncé est vrai pour tout n.

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge, forcément vers un point fixe compris entre u_0 et $\frac{1}{2}$. Or d'après le tableau de signe de $f(x) - x$ $\frac{1}{2}$ est le seul tel point fixe.

d. $u_1 = f(u_0) \geq u_0$ d'après le tableau de signe de $f(x) - x$, et $u_0 > 1$ donc l'énoncé est vrai pour $n = 0$.

Supposons l'énoncé vrai pour n ; l'hypothèse de récurrence $u_{n+1} > 1$ entraine $f(u_{n+1}) \geq u_{n+1}$ d'après le tableau de signe de $f(x) - x$. On a donc bien $u_{n+2} \geq u_{n+1} > 1$, c'est à dire l'énoncé pour $n+1$. On en déduit l'énoncé pour tout n.

La suite (u_n) est donc croissante. Soit elle est majorée et alors elle converge, forcément vers un point fixe de f supérieur ou égal à u_0 ; soit elle n'est pas majorée et alors sa limite est $+\infty$.

Or f n'a pas de point fixe supérieur ou égal à $u_0 = \frac{3}{2}$, donc u_n tend vers $+\infty$.

Exercice. On pose $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

a. Quel est l'allure du graphe de f ? Dessiner sur ce même graphe la droite d'équation $y = x$.

b. Peut on appliquer le théorème des accroissements finis au taux d'accroissement $\frac{f(1)-f(-1)}{2}$?

Quelle majoration donne le théorème des accroissements finis appliqué à $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}|$ sous l'hypothèse $x, y \geq \frac{3}{2}$?

c. Quels sont les points fixes de f ? Sont ils attractifs ?

d. On définit (u_n) par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence sur n que $u_n > 0$ pour tout n.

La suite (u_n) est elle croissante ou décroissante ? Qu'en est il de la suite (u_{2n}) ?

e. On définit (u_n) par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit l le plus grand point fixe de f. Montrer par récurrence qu'on a pour tout n $\frac{3}{2} \leq u_n$ et $|u_n - l| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - l|$. Qu'en déduit on sur la suite (u_n) ?

Réponse.

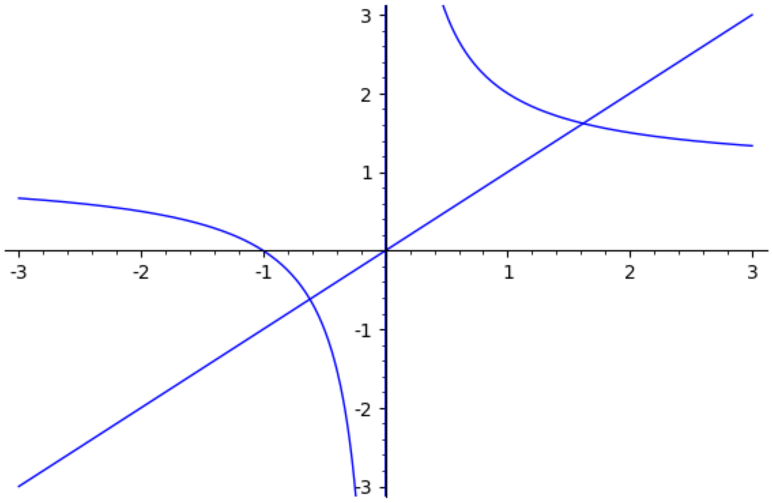
a. Les limites de f en $-\infty$, 0 et $+\infty$ indiquent une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$ et $+\infty$, et une asymptote verticale en $x = 0$.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ est strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles (mais pas sur $\mathbb{R}$ entier : $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$!)

Le signe de f'' indique que le graphe de f est concave au dessus de $]-\infty, 0[$ et convexe au dessus de $]0, +\infty[$. On peut calculer $f(-1)$ et la tangente en -1, $f(1)$ et la tangente en 1 pour compléter l'allure du graphe.

In [2]:
```
plot(1+1/x,xmin=-3,xmax=3,ymin=-3,ymax=3)+plot(x,xmin=-3,xmax=3,ymin=-3,ymax=3)
```

Out[2]:



b. On ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis au taux d'accroissement $\frac{f(1)-f(-1)}{2}$ parce que f n'est pas dérivable sur l'intervalle $[-1, 1]$ entier. Si on le pouvait on trouverait $\frac{f(1)-f(-1)}{2} = f'(c)$ ce qui serait absurde car $\frac{f(1)-f(-1)}{2} = 1$ est strictement positif et f' est strictement négative.

Pour $x, y \geq \frac{3}{2}$ on a $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| = |f'(c)|$ pour un c entre x et y donc supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$. Or $|f'(c)| = \frac{1}{c^2} \leq \frac{4}{9}$ d'où la majoration $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| \leq \frac{4}{9}$

c. On résoud $f(x) = x : 1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x + 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$|f'(\frac{1-\sqrt{5}}{2})| = \frac{4}{(1-\sqrt{5})^2} > 1$ car $\sqrt{5}$ est strictement compris entre 2 et 3 donc $(1-\sqrt{5})^2$ est strictement compris entre 1 et 4. On conclut que $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ n'est pas attractif.

$|f'(\frac{1+\sqrt{5}}{2})| = \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} < 1$ car $\sqrt{5} > 2$ donc $(1+\sqrt{5})^2 > 9$. On conclut que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est attractif.

d. On a $u_0 > 0$. Supposons $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} > 0$. On en déduit $u_n > 0$ pour tout n.

Observons le signe de $u_{n+1} - u_n$ suivant n : Le signe de $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est opposé au signe de $u_{n+1} - u_n$ car f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$; donc (u_n) n'est ni croissante ni décroissante sauf si elle est constante, ce qui n'est pas : $u_1 \neq u_0$.

Rq : le calcul de u_0, u_1, u_2 suffit à conclure que (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

On a $u_{2(n+1)} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$. Or $x \mapsto f(f(x))$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc le signe de $u_{2(n+1)} - u_{2n}$ ne change pas avec n, c'est celui de $u_2 - u_0$.

$u_1 = f(\frac{3}{2}) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; $u_2 = f(\frac{4}{3}) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} > \frac{6}{4} = u_0$. On conclut que (u_{2n}) est strictement croissante.

e. L'énoncé est évidemment vrai pour $n = 0$. Supposons l'énoncé vrai pour n. On observe $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2}$. L'inégalité de la question (b) appliquée à u_n et l donne $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$. Or $|u_n - l| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - l|$ donc $|u_{n+1} - l| \leq (\frac{4}{9})^{n+1}|u_0 - l|$.

Comme $\frac{4}{9} \leq 1$ on en déduit $|u_{n+1} - l| \leq |u_0 - l| = l - \frac{3}{2}$ autrement dit $u_{n+1} \in [l - (l - \frac{3}{2}), l + (l - \frac{3}{2})] = [\frac{3}{2}, 2l - \frac{3}{2}]$ donc $u_{n+1} \geq \frac{3}{2}$.

Comme $\frac{4}{9} < 1$, la suite géométrique $((\frac{4}{9})^n)$ tend vers 0 donc la suite $(|u_n - l|)$ tend vers 0, autrement dit (u_n) tend vers l

Rq : On pourrait alternativement utiliser la monotonie des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) pour montrer qu'elles convergent toutes deux vers l comme dans l'exercice précédent et en déduire que la suite (u_n) tend vers l.

L2EG-math3 – interrogation 1 A – 7 nov. 2018

Calculatrices et autres appareils électroniques interdits

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\longleftarrow$ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

....

Justifiez raisonnablement vos réponses

Exercice. Quelle est la limite de la suite de terme général

$$\frac{n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{2}}} \quad ?$$

Exercice. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$.
a. Donner le tableau de variation de f. En déduire que si $x \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$.
b. Déterminer les points fixes de f. Sont ils stables ?
c. Dessiner l'allure du graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ au dessus de l'intervalle $[0, 5]$.
d. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Représenter sur le dessin u_0, u_1, u_2.
Montrer par récurrence qu'on a $u_n \geq 0$ pour tout n.
En utilisant le tableau de variation de f montrer qu'on a $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n.
La suite (u_n) admet elle une limite ? Si oui laquelle ?

Ex 1 $\quad \dfrac{n^{1/3}+n^{1/4}}{n^{1/3}+n^{1/2}} = \dfrac{n^{1/3}\left(1+n^{1/4-1/3}\right)}{n^{1/2}\left(n^{1/3-1/2}+1\right)} = n^{1/3-1/2}\,\dfrac{1+n^{-1/12}}{n^{-1/6}+1}$

$$= \underbrace{\underbrace{n^{-1/6}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{1+\overbrace{n^{-1/12}}^{\to 0}}{\underbrace{n^{-1/6}}_{\to 0}+1}}_{\to 1}}_{\to 0}$$

Ex2 : $f(x) = 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$

a. $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{2x}{8} = \frac{1}{4}(1+x)$ <0 si $x<-1$
>0 si $x>-1$

$\lim_{-\infty} f = \lim_{-\infty} \frac{x^2}{8} = +\infty$; idem pour $\lim_{+\infty} f$

$f(-1) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

si $x \geq 0$ alors $\frac{x}{4} \geq 0$ et $\frac{x^2}{8} \geq 0$ donc $1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} \geq 0$

Autre méthode : avec le TV : $x \geq -1 \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{7}{8} \geq 0$ car $f \nearrow$ sur $[-1, +\infty[$

b. x point fixe $\Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} = x \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{8} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3-1 = 2$ ou $x = 3+1 = 4$

x est point fixe stable si $f(x) = x$ et $|f'(x)| < 1$

$|f'(2)| = |\frac{1}{4}(1+2)| = \frac{3}{4} < 1$ donc 2 est stable

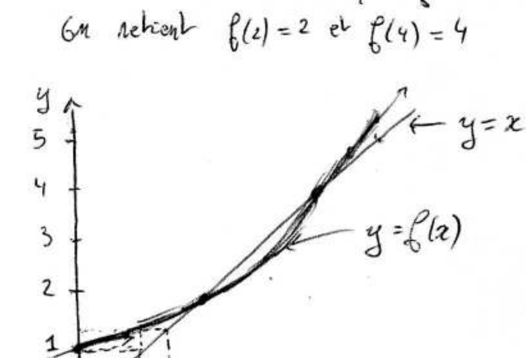
$|f'(4)| = |\frac{1}{4}(1+4)| = \frac{5}{4} > 1$ donc 4 est instable

c Allure du graphe sur $[0,5]$

On calcule $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{4}$ $\rightsquigarrow$ tangente en 0 : droite passant par $(0,1)$ de pente $\frac{1}{4}$

$f(5) = 1 + \frac{5}{4} + \frac{25}{8} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + 3 + \frac{1}{8} = 5 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 5{,}375$; $f'(5) = \frac{1}{4}(1+5) = \frac{3}{2}$ $\rightsquigarrow$ tangente en 5

On retient $f(2) = 2$ et $f(4) = 4$



d. On a bien $u_0 \geq 0$. Supposons $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après (a) donc par récurrence sur n $u_n \geq 0$ pour tout n

On a $u_1 = f(0) = 1 \geq u_0 = 0$

Supposons $u_{n+1} \geq u_n$. Comme f est croissante sur $[-1, +\infty[$ et comme $u_n \geq 0 \geq -1$ d'après (a) on a $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$

c'est à dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Donc par récurrence sur n $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n : (u_n) est croissante.

Convergence ?

Montrons par récurrence sur n $u_n \leq 2$. C'est vrai pour $n = 0$. ~~Soit~~ Supposons $u_n \leq 2$; comme $u_n \geq 0$ d'après (a) et comme f est $\nearrow$ sur $[-1, +\infty[$ on a $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(2) = 2$ donc $u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion $u_n \leq 2$ pour tout n et (u_n) croissante, donc (u_n) converge, forcément vers un point fixe ≤ 2 donc vers 2 puisque 2 est le seul tel point fixe

L2EG math3 -- 2018-2019

Questions types pour la seconde interrogation.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 : expression du terme général, comportement asymptotique

Question de cours. Quelles sont les relations de récurrence linéaire d'ordre 1 parmi les relations suivantes ?

$(1)\ u_{n+1} + 2u_n = 1, \quad (2)\ u_{n+1} - (u_n)^2 = 0, \quad , (3)\ u_{n+2} = u_n$

Réponse. (1) uniquement.

Question de cours. Qu'est ce que l'équation homogène associé à une relation de récurrence linéaire ?

Réponse. l'équation obtenue en remplaçant le terme constant par 0.

Exercice. (vu en cours) Donner l'expression du terme général de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 21 \\ u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = 1 - 2n + n^2 \end{cases}$$

Que peut on dire de la limite de (u_n) ?

Réponse. L'équation homogène est $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = 0$ soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ dont les solutions sont de la forme $u_n = \alpha \times (\frac{1}{2})^n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ constante.

On sait qu'il existe une solution particulière de l'équation de départ qui est un polynôme en n de même degré que le second membre $1 - 2n + n^2$; elle s'écrit $u_n = an^2 + bn + c$. On cherche a, b, c pour que la relation $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = 1 - 2n + n^2$ soit vérifiée. On remplace dans la relation u_n et u_{n+1} par leurs expressions :

$a(n+1)^2 + b(n+1) + c - \frac{1}{2}\big(an^2 + bn + c\big) = 1 - 2n + n^2$ qu'on réécrit en développant $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ puis en rassemblant les termes en n^2 et en n :

$\frac{a}{2}n^2 + (2a + \frac{b}{2})n + a + b + \frac{c}{2} = 1 - 2n + n^2.$

Il faut donc avoir (et il suffit) $\frac{a}{2} = 1$ soit $a = 2$, $2a + \frac{b}{2} = -2$ soit $b = 2(-2 - 2a) = -12$, $a + b + \frac{c}{2} = 1$ soit $c = 2(1 - a - b) = 22$.

Les solutions générales sont somme de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène, donc de la forme $\alpha(\frac{1}{2})^n + 2n^2 - 12n + 22$. On cherche α de sorte que $u_0 = 21$ soit $\alpha + 22 = 21$ soit $\alpha = -1$.

Exercice. (vu en cours) Donner l'expression du terme général de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - u_n = 1 - 2n + n^2 \end{cases}$$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice. Donner l'expression du terme général de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = (\frac{1}{2})^n n \end{cases}$$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ? A quelle vitesse converge t-elle ?

Exercice. Donner l'expression du terme général de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = (\frac{2}{3})^n - (\frac{1}{2})^n n \end{cases}$$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ? A quelle vitesse converge t-elle ?

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\frac{2}{3})^k (1-2k)$ puis la limite de (S_n) (c'est à dire la somme infinie)

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : expression du terme général, forme matricielle

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).

Déterminer u_8.

Chercher les suites géométriques solution de l'équation homogène. Pouvez vous trouver une combinaison linéaire de ces suites vérifiant la condition initiale $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$? Qu'en déduit on sur le comportement asymptotique de la suite (u_n) ?

Quelles sont les conditions initiales (u_0, u_1) telles que la suite (u_n) vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ converge vers un nombre réel ?

Exercice. On considère la relation de récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad (*)$.

Quelles sont les suites géométriques vérifiant $(*)$?

Soit (u_n) la suite déterminée par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation $(*)$. Calculer les premiers termes de cette suite. Quelle expression du terme général u_n peut on conjecturer ? Pouvez vous montrer par récurrence que ce que vous conjecturez est vrai pour tout n ?

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Quelle relation vérifie (v_n) si (u_n) vérifie $(*)$? En déduire une expression de v_n puis de (u_n) suivant les conditions initiales u_0, u_1

Exercice. Quelles sont les suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = \frac{n}{2^n}$$

On cherchera une solution de l'équation homogène de la forme a^n puis on écrira $u_n = a^n v_n$: la suite $w_n = v_{n+1} - v_n$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1 à déterminer.

Autre méthode : on pose $v_n = u_{n+1} + \alpha u_n$ où α est un nombre fixé. Pour un α convenable, u_n est solution si et seulement si v_n vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à déterminer. On exprimera v_n en fonction de n puis u_n.

Exercice. Quelles sont les suites vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = \frac{n}{2^n}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 et u_1 la suite (u_n) est elle convergente ?

On cherchera une solution de l'équation homogène de la forme a^n puis on écrira $u_n = a^n v_n$: la suite $w_n = v_{n+1} - v_n$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 1 à déterminer.

Autre méthode : on pose $v_n = u_{n+1} - r u_n$ où r est solution de l'équation caractéristique. (v_n) vérifie une relation d'ordre 1 à déterminer, d'où on déduit une expression de v_n en fonction de n puis de u_n.

L2EG-math3 interrogation 2 A 5 dec. 2018

Calculatrices et autres appareils électroniques interdits. Justifiez raisonnablement vos réponses.

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

$\longleftarrow$ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

....

Exercice. On considère la relation de récurrence $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = 1 + 2n$ $(*)$.
a. Quelles sont les solutions de l'équation homogène ? **b.** Donner une solution particulière de l'équation avec second membre.
c. Quelle est l'expression de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $(*)$? Quelle est la limite de cette suite ? (Justifiez.)

a. Equation homogène $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = 0 \iff u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$

Solutions $u_n = u_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque

b. Le second membre est un polynôme de degré 1, or il existe une solution particulière de même forme, même degré car $u_n = 1$ n'est pas solution de l'éq. homogène

$u_n = an + b$ alors $u_{n+1} = a(n+1) + b = an + a + b$ puis $u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = an + a + b - \frac{1}{3}an - \frac{1}{3}b$

$= \frac{2}{3}an + a + \frac{2}{3}b$

$\forall n, u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = 1 + 2n \iff \forall n,\ \frac{2}{3}an + a + \frac{2}{3}b = 1 + 2n$

$\iff \frac{2}{3}a = 2$ et $a + \frac{2}{3}b = 1$

$\iff a = 3$ et $b = -3$

$u_n = 3n - 3$ est solution particulière de $(*)$

c. (u_n) solution de $(*)$ $\iff u_n = \alpha\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - 3$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque

$u_0 = 1 \iff \alpha - 3 = 1 \iff \alpha = 4$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$; $3n \to +\infty$ donc $4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - 3 \longrightarrow +\infty$

Exercice. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et la relation de récurrence :
$u_{n+2} = \frac{5}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$.

a. Déterminer u_4.

b. Quelles sont les suites géométriques solution de la rélation de récurrence ? Pouvez vous trouver une combinaison linéaire de ces suites vérifiant la condition initiale $u_0 = 1$, $u_1 = 0$?

c. Qu'en déduit on sur la limite de la suite (u_n) ?

a. $u_0 = 1$

$u_1 = 0$

$u_2 = \frac{5}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_0 = -\frac{2}{3}$

$u_3 = \frac{5}{3}u_2 - \frac{2}{3}u_1 = -\frac{10}{9}$

$u_4 = \frac{5}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_2 = -\frac{50}{27} + \frac{4}{9} = -\frac{50-12}{27} = -\frac{38}{27}$

b. $u_n = r^n$ solution $\Leftrightarrow r^{n+2} = \frac{5}{3}r^{n+1} - \frac{2}{3}r^n$

$r = 0$ n'est pas solution ~~[illegible]~~ car $0^0 = 1$

On divise par $r^n \neq 0$ si $r \neq 0$ $\quad r^2 = \frac{5}{3}r - \frac{2}{3}$ soit $r^2 - \frac{5}{3}r + \frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \left(r - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36} + \frac{2}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \left(r - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$\Leftrightarrow r - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow r = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ ou $r = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$

$u_n = \alpha 1^n + \beta\left(\frac{2}{3}\right)^n$ vérifie $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ si $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \frac{2}{3}\beta = 0$

donc si $\alpha = -\frac{2}{3}\beta$ et $-\frac{2}{3}\beta + \beta = 1$ soit $\beta = 3$ puis $\alpha = -2$

c. $u_n = -2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} -2$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

L2EG math3 -- 2018-2019

Questions types pour la partie "algèbre linéaire - système d'équations linéaires".

Questions de cours Qu'est ce qu'une matrice de taille p fois q ? Qu'est ce qu'un vecteur ligne ? un vecteur colonne ? Comment est défini le produit de deux matrices A, B ?

Question de cours. Que désigne t-on par noyau d'une matrice M (et qu'on note $\operatorname{Ker}(M)$) ?

Que désigne t-on par image de M ?

Exercice. On considère le système d'équations

$$(*) \quad \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2z=2 \\ x-3y-z=1 \end{cases}$$

a. Le vecteur $(x, y, z)=(1,-\frac{2}{3}, 1)$ est il solution ?

b. Quelles sont les solutions de ce système ?

Réponse. a. On remplace (x, y, z) dans le système d'équations ; les deux premières sont satisfaites mais pas la troisième donc non $(1,-\frac{2}{3}, 1)$ n'est pas solution.

b. ...

Exercice. On considère le système d'équations

$$(*) \quad \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-2z=2 \\ x-3y-3z=1 \end{cases}$$

Donner un paramétrage des triplets (x, y, z) solutions de ce système.

Exercice. On considère le système d'équations d'inconnues x, y, z et où b_1, b_2, b_3 sont des paramètres fixés.

$$(*) \quad \begin{cases} 2x+3y+z=b_1 \\ 3x-2z=b_2 \\ x-3y-3z=b_3 \end{cases}$$

a. Quelle est la forme matricielle de ce système ?

b. A quelle condition sur b_1, b_2, b_3 le système admet il une solution ? Si cette condition est satisfaite, quelles sont les solutions du système ? (Donner un paramétrage des triplets (x, y, z) solution.)

c. On note A la matrice associée à ce système. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est il dans l'image de A ?

Réponse. a. La forme matricielle est $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

b. On résoud le système : on commence par choisir la variable x et la 3ème équation (par exemple) qu'on réécrit

$x = b_3 + 3y + 3z.$

On reporte cette expression de x dans les autres équations qui deviennent :

$$\begin{cases} 2(b_3 + 3y + 3z) + 3y + z = b_1 \\ 3(b_3 + 3y + 3z) - 2z = b_2 \end{cases}$$

ce qu'on réécrit comme

$$\begin{cases} 9y + 7z = b_1 - 2b_3 \\ 9y + 7z = b_2 - 3b_3 \end{cases}$$

On choisit alors la variable y et la 1ère de ces deux équations (par exemple) qu'on réécrit $y = \frac{1}{9}(b_1 - 2b_3 - 7z)$ et on reporte dans l'équation restante qui devient

$9\frac{1}{9}(b_1 - 2b_3 - 7z) + 7z = b_2 - 3b_3$ soit $b_1 - 2b_3 = b_2 - 3b_3$ soit $b_1 + b_3 - b_2 = 0.$

Si $b_1 + b_3 - b_2 \neq 0$ il n'y a pas de solution. Sinon les solutions sont les (x, y, z) avec z quelconque, $y = \frac{1}{9}(b_1 - 2b_3 - 7z)$ et
$x = b_3 + 3y + 3z = b_3 + \frac{1}{3}b_1 - \frac{2}{3}b_3 - \frac{7}{3}z + 3z = \frac{1}{3}(b_1 + b_3) + \frac{2}{3}z.$

Autrement dit les solutions sont les triplets $\left(\frac{1}{3}(b_1 + b_3) + \frac{2}{3}z\ ,\ \frac{1}{9}(b_1 - 2b_3) - \frac{7}{9}z\ ,\ z\right)$ avec $z \in \mathbb{R}$ quelconque.

c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans l'image de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ s'il existe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à trouver (x, y, z) solution du système $(*)$ avec $(b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 1)$. D'après (b) il n'y a de solution que si $b_1 + b_3 - b_2 = 0$. Or $1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$ donc pas de solution donc non $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de A.

Exercice. On définit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Déterminer les points fixes de A.

Réponse. On cherche les $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $AX = X$ soit

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = y \end{cases}$$

ce qu'on réécrit

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}$$

La seconde équation est équivalente à la première. La première équivaut à $y = \frac{4}{3}x$, x quelconque.

Les points fixes de A sont les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x \\ \frac{4}{3}x \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

INSTITUT SUPERIEUR D'ECONOMIE ET DE MANAGEMENT
Université Nice-Sophia-Antipolis

ANNEE UNIVERSITAIRE 2018 – 2019
1ère SESSION – 1er SEMESTRE

FILIERE : Economie Gestion **Année d'Etude :L2**

Intitulé précis de la matière (conforme au Régime des Examens) : Mathématiques 3

Durée : 1h30 Groupe : tous

Nom de l'Enseignant auteur du sujet : F-X. Dehon

Type d'épreuve : écrit

SUJET A

Justifiez chaque réponse

Q.1. Sur un même dessin représenter l'allure des graphes de $x \mapsto x^{\frac{2}{3}}$ et $x \mapsto x$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Ex. 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Sur un même dessin représenter l'allure du graphe de f sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$, le graphe de $x \mapsto x$ et les trois premiers termes de la suite (u_n).

b. Montrer par récurrence sur n qu'on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.

c. Que peut on dire de la limite de (u_n) ?

Ex. 3. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $AX = X$ (En donner un paramétrage).

Matériels autorisés : aucun
Documents autorisés : aucun

Ex. 4. On considère la relation de récurrence

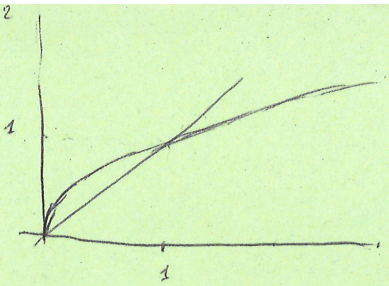
$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + \frac{5}{9}u_n = \frac{n}{3^n} \quad (*)$$

a. Quelles sont les solutions de l'équation homogène ?

b. Trouver a, b, c tels que la suite de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}(an^2 + bn + c)$ soit solution de $(*)$.

c. Pour quelles conditions initiales (u_0, u_1) la suite (u_n) définie par u_0, u_1 et la relation $(*)$ converge t-elle (c'est à dire admet une limite finie) ?

Q1



0,5 droite $y = x$

① passe par $(0,0)$, $(1,1)$ (intersection avec droite $y = x$)

0,5 tangente verticale en 0

pente $1/3$ en $(1,1)$

forme concave (branche parabolique)

① position relative,

Ex 2 a $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{8} - 1$ parabole vers le bas de sommet $\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{8}\right) = (2{,}5;\ 2{,}125)$

ici $x = \frac{3}{2} \rightsquigarrow f(x) = \frac{13}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1{,}625$ $f'(x) = -x + \frac{5}{2} = 1$ = pente de la tangente en $3/2$

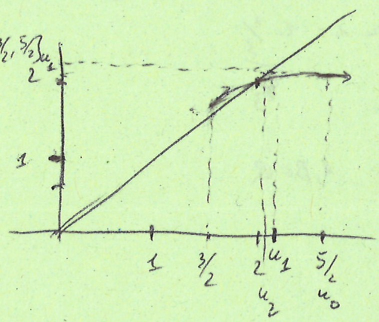
① $x = \frac{5}{2} \rightsquigarrow f(x) = \frac{17}{8}$ $f'(x) = 0$ tangente horizontale

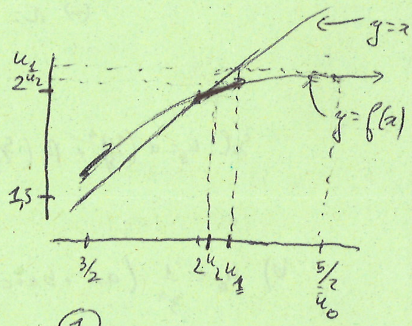
① Position du graphe par rapport à droite $y = x$: $f(x) - x = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-2)$

x	$\frac{3}{2}$	1		2	$\frac{5}{2}$
$f(x) - x$	$-$	0	$+$	0	$-$

en $x = 1$ pente $f'(1) = \frac{3}{2}$ mais cet hors de $[3/2, 5/2]$

en $x = 2$ pente $f'(2) = \frac{1}{2}$





①

b. $n = 0$ $u_1 = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{17}{8} < \frac{5}{2} = \frac{20}{8}$ on a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$

Supposons $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$. On observe f croissante sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$. Si on sait $\underbrace{u_n \leq 5/2}_{①}$ alors $\underbrace{f(1)}_{1} \leq \underbrace{f(u_{n+1})}_{u_{n+2}} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}}$

①

et $u_{n+1} \leq u_n \leq 5/2$ donc $u_{n+1} \leq 5/2$

Conclusion : on montre par récurrence $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ ① pour rédaction réc.

c (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc converge, forcément vers un point fixe donc vers 1 ou 2

① ①

On a $u_0 \geq 2$ $u_n \geq 2 \Rightarrow \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \geq \underbrace{f(2)}_{2}$ car $2, u_n \in \left]-\infty, 5/2\right]$ et $f \nearrow$ sur $\left]-\infty, 5/2\right]$

$\forall n$ $u_n \geq 2$ donc (u_n) ne peut converger vers 1, (u_n) converge vers 2 ①

Ex 3 $AX = \begin{pmatrix} -x+y-z \\ -x+2y-2z \\ -x+2z \end{pmatrix}$

(1)

$AX = X \iff \begin{cases} -x+y-z = x \\ -x+2y-2z = y \\ -x+2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+y-z=0 \\ -x+y-2z=0 \\ -x+z=0 \end{cases}$ (1)

L3 : $x = z$ $\leadsto$ L2 : $y - 3z = 0$ $\leadsto$ $y = 3z$ (1)

L1 : $y - 3z = 0$

$Sol = \{ (z, 3z, z), z \in \mathbb{R} \}$ $\left[= \{ z(1,3,1), z \in \mathbb{R} \} \text{ droite engendrée par } (1,3,1) \right]$ (1)

Ex 4 a) éq. homogène $u_{n+2} - 2u_{n+1} + \frac{5}{9} u_n = 0$ (1)

(r^n) solution $\iff r^2 - 2r + \frac{5}{9} = 0 \iff (r-1)^2 - 1 + \frac{5}{9} = 0 \iff (r-1)^2 = \frac{4}{9}$

$\iff r = \underbrace{1 - \frac{2}{3}}_{1/3}$ ou $r = \underbrace{1 + \frac{2}{3}}_{5/3}$ (1)

Sol. $u_n = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{5}{3}\right)^n$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (1)

b) $u_n = \frac{1}{3^n} (an^2 + bn + c)$

$u_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}} \left(a(n^2+2n+1) + b(n+1) + c \right)$

$u_{n+2} = \frac{1}{3^{n+2}} \left(a(n^2+4n+4) + b(n+2) + c \right)$

(1) (u_n) sol. de $(*)$ $\iff \frac{1}{3^{n+2}} \left(an^2 + 4an + 4a + bn + 2b + c \right) - \frac{2}{3^{n+1}} \left(an^2 + 2an + a + bn + b + c \right) + \frac{5}{9} \left(an^2 + bn + c \right) = \frac{n}{3^n}$

$\iff \underbrace{\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3} + \frac{5}{9} \right)}_{0} an^2 + \left(\frac{4a+b}{9} - \frac{2}{3}(2a+b) + \frac{5b}{9} \right) n + \frac{1}{9}(4a+2b+c) - \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{5}{9} c = \frac{n}{3^n}$

(1) $\iff -\frac{8}{9} a = 1$ et $-\frac{2}{9} a - \frac{4}{9} b = 0$

$\iff a = -\frac{9}{8}$ et $b = -\frac{a}{2} = \frac{9}{16}$, c quelconque par ex 0

c $(u_n) = \alpha \left(\frac{1}{3}\right)^n + \beta \left(\frac{5}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n} \left(-\frac{9}{8} n^2 + \frac{9}{16} n \right)$ (1) converge $\iff \beta = 0$. (1)

$u_0 = \alpha + \beta$

$u_1 = \frac{1}{3} \alpha + \frac{5}{3} \beta + \frac{1}{3} \left(-\frac{9}{16} \right) = \frac{1}{3} \alpha + \frac{5}{3} \beta - \frac{3}{16}$ (1)

$\beta = 0 \Rightarrow \alpha = u_0$ puis $u_1 = \frac{1}{3} u_0 - \frac{3}{16}$. (1) Réciproquement (0,5) $\beta = (u_0 - \alpha)$ puis $u_1 = \frac{1}{3} \alpha + \frac{5}{3} (u_0 - \alpha) - \frac{3}{16}$

$= \frac{1}{3} u_0 - 3/16$

$\frac{4}{3} u_0 - \frac{4}{3} \alpha = 0 \iff u_0 = \alpha \Rightarrow \beta = 0$

INSTITUT SUPERIEUR D'ECONOMIE ET DE MANAGEMENT
Université Nice-Sophia-Antipolis

ANNEE UNIVERSITAIRE 2018 – 2019
SESSION 2

FILIERE : Economie gestion **Année d'Etude : L2**

Intitulé précis de la matière (conforme au Régime des Examens) : **Mathématiques 3**

N° de l'unité : **U** Durée **: 1h30** Groupe: tous

Nom de l'Enseignant auteur du sujet : F-X. DEHON

Type d'épreuve : écrit

SUJET

Q.1. Quelle est la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$? Expliquer.

Ex. 2. On considère le système d'équations d'inconnues x, y, z et où a, b, c sont des paramètres fixés.

$$(*) \quad \begin{cases} 2x + 3y - z = a \\ 3x + 2y = b \\ x - y + z = c \end{cases}$$

a. Quelle est la forme matricielle de ce système ?

b. A quelle condition sur a, b, c le système admet il une solution ? Si cette condition est satisfaite, quelles sont les solutions du système ? (Donner un paramétrage des triplets (x, y, z) solution.)

c. On note A la matrice associée à ce système. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est il dans l'image de A? Si oui exhiber un vecteur X tel que $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. En étudiant $f(x) - x$ ou en en calculant un tableau de signe, montrer que $f(x) < x$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$

b. Montrer par récurrence sur n qu'on a $u_{n+1} \leq u_n < 1$ pour tout n.

c. Que peut on dire de la limite de (u_n) ?

Matériels autorisés : NEANT **Documents autorisés : NEANT**

Ex. 4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{3^n}.$$

a. Quelles sont les solutions de l'équation homogène ?

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Ex. 5. On considère la relation de récurrence

$$u_{n+2} - \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{9}u_n = 1 \quad (*)$$

a. Pour cette question seulement on suppose $u_0 = 1, u_1 = -1$; calculer u_3.

b. Trouver α tel que $u_n = \alpha^n$ soit solution de l'équation homogène associée à $(*)$. Vérifier que $u_n = n\alpha^n$ est également solution.

c. Trouver une solution particulière de l'équation homogène associée à $(*)$. Quelle est l'expression de la solution générale de $(*)$? Que peut on dire de sa limite quand $n \to +\infty$.

Q1 (1) $\sqrt{x}$ étant dominant devant $\ln(x)$ au voisinage de $+\infty$, $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ tend vers 0

Ex 2 ~~$x = \frac{1}{2}(a+y-3y)$~~ $\quad z = 2x+3y-a$ $\quad$ a. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x+2y = b \\ x-y+(2x+3y-a) = c \quad \text{soit } 3x+2y = c+a \end{cases}$$

(1)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(b-2y) \\ b = c+a \end{cases}$$

(1) Condition $b = c+a$ et alors $x = \frac{1}{3}(b-2y)$, $z = 2x+3y-a = \frac{2}{3}(b-2y)+3y-a = \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}b - a$

y qcq (1)

(1) $(a,b,c) \in \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie la contrainte $b = c+a$ d'où au moins une sol. donc oui

en prenant $y=0$ on obtient la solution $x = \frac{b}{3} = \frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}b - a = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Ex 3 $\quad f(x) - x = -x^2+4x-3 = -(x-2)^2+1 = -(x-1)(x-3)$

(2)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)-x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

on a bien $f'(x) = -2x+4 > 0$ si $x < 2$ donc $f \nearrow$ strict sur $]-\infty, 2[$ ~~directe en $x=1$~~
$\frac{d}{dx}(f(x)-x)$ $\quad x \mapsto f(x)-x$ $\quad$ et $f(1)-1 = 0$

(2) $n=0$ $\quad u_0 < 1$ donc $f(u_0) < u_0 < 1$ d'après ↑

Supposons $u_{n+1} < u_n < 1$ alors $\left| \begin{array}{l} u_{n+1} < 1 \text{ donc} \\ f(u_{n+1}) < u_{n+1} \end{array} \right.$ donc on a bien $u_{n+2} < u_{n+1} < 1$

on a bien $f \nearrow$ sur $]-\infty, 1]$, donc $f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(1)$

$(u_n) \searrow$ donc soit tend vers $-\infty$ soit converge vers $\ell \leq u_0 = 0$. Forcément ℓ est un pt fixe

(2) Or d'après le tableau de signe 1 et 3 sont les seuls pts fixes, pas de pt fixe ≤ 0 donc (u_n) converge n'est pas possible

Ex 4

$u_0 = 1$

$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{3^n}$

a. éq. homogène $u_{n+1} - u_n = 0 \iff u_{n+1} = u_n \iff (u_n)$ cste

(1)

b. Sol. part. de la forme ~~$\frac{Q(n)}{3^n}$ avec~~ $\frac{an+b}{3^n}$ car $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ n'est pas sol. de l'éq. hom.

(1)

(1) $u_n = \frac{an+b}{3^n}$, $u_{n+1} = \frac{an+a+b}{3^{n+1}}$ $\qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{1}{3}an + \frac{a+b}{3} - an - b\right) = \frac{1}{3^n}\left(-\frac{2}{3}an + \frac{a-2b}{3}\right)$

(1) $\rightsquigarrow -\frac{2}{3}a = 1$ et $\frac{a-2b}{3} = 0$

$a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{3}{4}$

1+1 $u_n = c - \left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{3^n}$ $\qquad u_0 = c - \frac{3}{4} = 1$ so $c = \frac{7}{4}$

(1) $\left(\frac{3}{2}n + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$ donc $u_n \to c = \frac{7}{4}$

Ex 5 a $u_2 = 1 + \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

(1) $u_3 = 1 + \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}u_1 = 1 + \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{34}{27}$

b $u_n = \alpha^n$ sol $\iff \alpha^{n+2} - \frac{2}{3}\alpha^{n+1} + \frac{1}{9}\alpha^n = 0 \quad \forall n$

$\iff \underbrace{\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}}_{\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)^2} = 0$

(1)

$\iff \alpha = \frac{1}{3}$

Vérifions $u_n = n\frac{1}{3}^n$ sol $\iff (n+2)\frac{1}{3}^{n+2} - \frac{2}{3}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{9}n\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \quad \forall n$

(1) $\iff \frac{n+2}{9} - \frac{2}{3}\frac{n+1}{3} + \frac{n}{9} = 0 \quad \forall n$ ok

c le second membre est de la forme $P(n)\,a^n$ avec P de degré 0 et $a = 1 \neq \alpha = \frac{1}{3}$ $\rightsquigarrow$ sol. part. de la forme

(1) $Q(n)\,1^n = Q(n)$ avec $d^\circ Q = d^\circ P$ $\rightsquigarrow Q(n) =$ cste c

(1)

(1) $u_n = c$ sol $\iff c - \frac{2}{3}c + \frac{1}{9}c = 1 \iff \frac{4}{9}c = 1 \iff c = \frac{9}{4}$

1+1 Sol. générale $u_n = \frac{9}{4} + a\left(\frac{1}{3}\right)^n + b\,n\left(\frac{1}{3}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4}$