L1aes – Un corrigé [1] de l'exercice 1 de l'examen TQA 2ème session avec barème de notation

Lorsqu'une réponse est donnée sans aucun détail de calcul, la note peut être 0 ou la moitié des points. Sont donnés en italique des rappels de définitions et des commentaires non réclamés par le sujet, en particulier hors barème de notation.

Exercice 1

1a. Population = les automobiles comptées autant de fois qu'elles interviennent dans les mesures. 2pt

Autre réponse possible : Population = ensemble des mesures.

Taille = 9

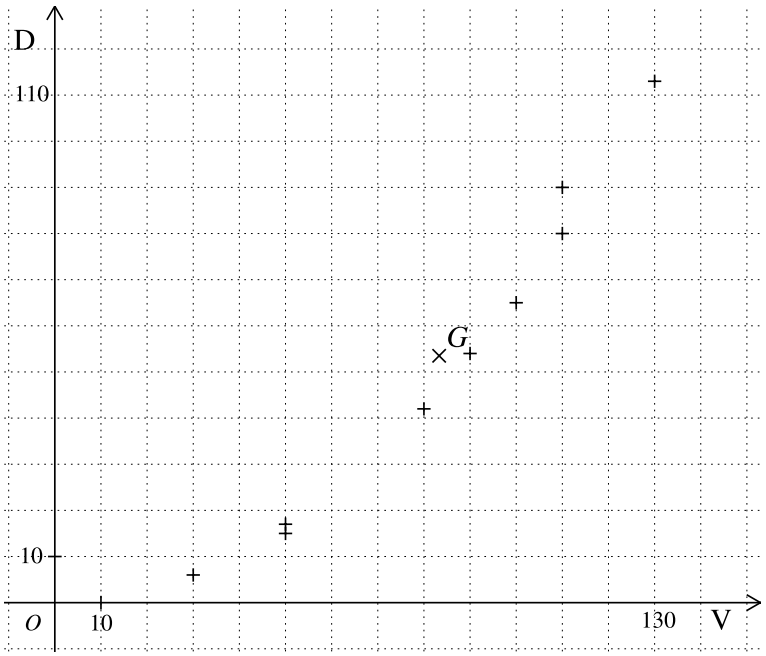
Deux caractères étudiés : la vitesse et la distance de freinage. Tous deux sont quantitatifs.

Etendue de la vitesse = $[30, 130]$.

1b. Moy(Vitesse) $= \frac{1}{9}\big(30 + 50 + 50 + \cdots + 130\big) = \frac{750}{9} = 83.3..$ 1.5pt

Moy(Distance) $= \frac{1}{9}\big(6 + 15 + 17 + \cdots + 113\big) = \frac{482}{9} = 53.5..$

1c. Dans le repère avec la vitesse en abscisse et la distance de freinage en ordonnée, le centre de gravité G du nuage de point est le point de coordonnées $(\text{Moy(Vitesse)}, \text{Moy(Distance)}) = (83.3.., 53.5..)$. .5pt pour le centre de gravité, 1pt pour le dessin



1d. E = "Vitesse > 85 " ; F = "Distance > 60 " 1pt pour f_E et f_F, 1pt pour $f_{E|F}$, 1pt pour la discussion sur l'indépendance

$$f_E = \frac{\text{nbre d'individus vérifiant E}}{\text{nbre total d'individus}} = \frac{5}{9} ;$$

de même $f_F = \frac{4}{9}$.

$$f_{F|E} = \frac{\text{nbre d'individus vérifiant E et F}}{\text{nbre d'individus vérifiant E}} = \frac{4}{5}.$$

L'évènement F est pratiquement indépendant de l'évènement E si et seulement si le quotient $\frac{f_{F|E}}{f_E}$ est proche de 1. Or $\frac{f_{F|E}}{f_E} = \frac{4/5}{5/9} = \frac{36}{25} = 1.4..$ n'est pas proche de 1.

[1] Dessins réalisés avec WxGéométrie `http://wxgeo.free.fr`.

Rq. $f_{F|E} = \frac{4}{5} = 0.8$ *est relativement proche de* 1 *ce qui signifie que* E *est proche de déterminer* F *(*E *déterminerait* F *si on avait* $f_{F|E} = 1$*). Comme* F *n'est pas l'évènement certain (*f_F *est loin de* 1*), l'assertion "*E *détermine* F*" est opposée à "*F *est indépendant de* E*". La dépendance se voit bien sur le nuage de points : la distance de freinage est proche d'une fonction strictement croissante de la vitesse (mais ce n'est pas exactement une fonction : plusieurs distances correspondent à* $V = 50$ *et à* $V = 110$*).*

1e. Modèle $D = aV + b$. On s'attend à $a > 0$ d'après le nuage de points : la distance de freinage est grosso modo une fonction strictement croissante de la vistesse.

.5pt pour la justification du signe de a, .25pt pour la discussion sur b

Soit I le point d'intersection de la droite de régression avec l'axe des ordonnées. Le signe de b donne la position de I par rapport à l'axe des abscisses ($b > 0 \Leftrightarrow$ l'intersection est au dessus de l'axe des abscisses, etc.). Cette position n'a pas de signification a priori, d'autant que $V = 0$ est en dehors de l'étendue des vitesses mesurées.

1f. $\mathrm{Var}(D) = \frac{1}{9}\left(6^2 + 15^2 + 17^2 + \cdots + 113^2\right) - \mathrm{Moy}(D)^2 = \frac{98192}{81} = 1212.2...$

$\mathrm{Var}(V) = \frac{1}{9}\left(30^2 + 50^2 + 50^2 + \cdots + 130^2\right) - \mathrm{Moy}(V)^2 = \frac{98192}{81} = 1000.$

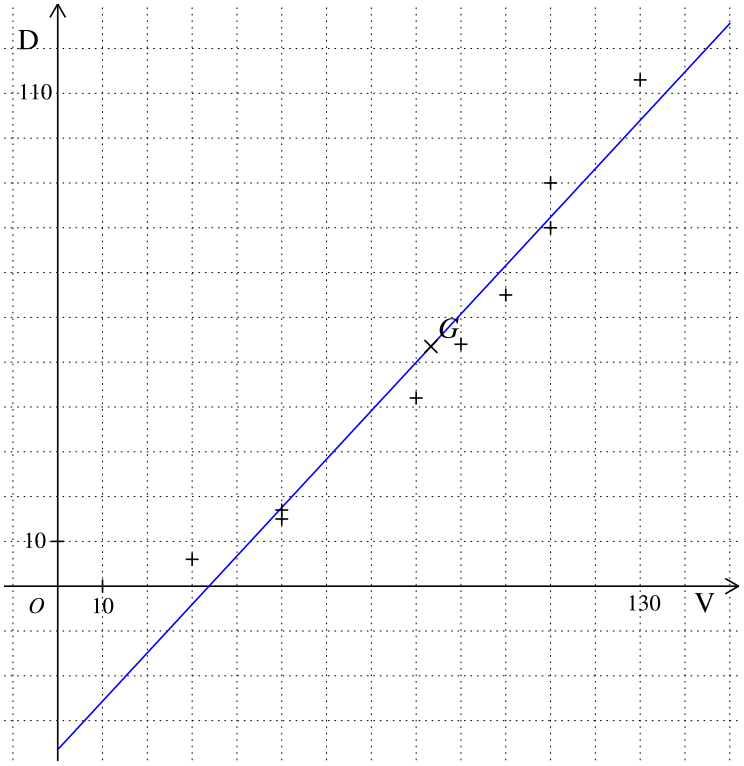
$\mathrm{Cov}(V, D) = \frac{1}{9}\left(30 * 6 + 50 * 15 + 50 * 17 + \cdots + 130 * 113\right) - \mathrm{Moy}(V) * \mathrm{Moy}(D)$.

$= \frac{29170}{27} = 1080.3..$

$a = \dfrac{\mathrm{Cov}(V, D)}{\mathrm{Var}(V)} = \dfrac{2917}{2700} = 1.08...$

$b = \mathrm{Moy}(D) - a * \mathrm{Moy}(V) = -36.47..$

1pt pour tous les calculs, 1pt pour le dessin



1g. La distance de freinage prédite pour $V = 1000$ est $a * 1000 + b = 1043.8...$

1pt pour la 1ère estimation de la distance, .5pt pour la critique de cette estimation.

Cela n'a pas de sens statistique : 1000 est largement en dehors de l'étendue des vitesses mesurées. Cela n'a pas non plus de sens vis à vis du sujet d'étude : 1000km/h n'est pas une vitesse usuelle pour une automobile. La question n'est donc doublement pas pertinente.

Pour $V = 10$ la distance de freinage prédite est $a * 10 + b = -25.6.. < 0$.

.5pt pour l'estimation de la distance, .5pt pour la critique

10 n'est pas très en dehors de l'étendue des vitesses mesurées mais manifestement le modèle $D = aV + b$ n'est pas bon pour les petites vitesses : la distance de freinage ne peut pas être négative.

Rq. *Le modèle est très bon pour V dans l'étendue des vitesses mesurées : cela se voit sur le dessin : le nuage de point est très proche de la droite de régression. Cela se voit aussi en calculant le coefficient de corrélation linéaire* $r = \frac{Cov(V,D)}{\sqrt{Var(V)}\sqrt{Var(D)}} = 0.9..$ *très proche de* 1.