

# Discussion sur le sujet > Le sujet



**F-X. Dehon**

14:55

Le sujet original est **Exemples de triangulation de surfaces et de calcul de leurs groupes d'homologie**, cf

[Exemples de triangulation de surfaces et de calcul de leurs groupes d'homologie.pdf](#)

Sur la notion de triangulation d'un espace topologique  $X$  (donnée d'un complexe simplicial  $K$  et d'un homéomorphisme  $|K| \rightarrow X$ ) je donne comme premières références :

- Le joli site web <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/> (<https://analysis-situs.math.cnrs.fr/>)
- La page d'un cours de M2 <https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/M2topalg/> (<https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/M2topalg/>) avec notamment les notes de cours.

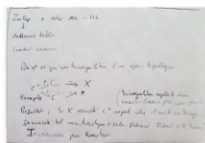
MODIFIÉ **Discussion du 17 janvier**

14:59

Existence d'une triangulation d'un espace  $X$ , comparaison de deux triangulations de  $X$ .

Une variété  $C^1$  admet une triangulation, cf <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html> (<https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html>)

2024\_01\_31-13\_59-Office-Lens.jpg



MODIFIÉ **Discussion du 31 janvier**

15:11

Quels sont les écueils en lisant <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html> (<https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html>) ?

*Structuration compliquée des objets ? Utilisation de prérequis ou ressources externes ? Trous dans l'argumentation ?*

Mieux vaut en tout cas commencer par se familiariser avec la définition d'un complexe simplicial et la triangulation "à la main" de quelques exemples de surface en lisant les sections 1,2,6 de <https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/M2topalg/08-09/c0.pdf> (<https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/M2topalg/08-09/c0.pdf>)

*Prérequis* : Ensemble de points affinement indépendant dans  $\mathbb{R}^n$ , enveloppe convexe de ces points, application affine déterminée par sa restriction à une base affine, espaces topologiques compacts et homéomorphismes.

On poursuivra à un moment donné par la comparaison de deux triangulations d'un même espace  $X$ .

On peut ensuite reprendre la lecture de <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html> (<https://analysis-situs.math.cnrs.fr/-Triangulation-des-varietes-.html>) :

- Quels sont les énoncés en terme d'existence et de comparaison des triangulations d'une variété  $X$  ?
- Où intervient dans le développement l'hypothèse que  $X$  est lisse ?

MODIFIÉ **! Prochaine réunion le 7 ou le 14 février.**

15:18

# Discussion sur le sujet > Questions de continuité

21 FÉVR. 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

16:44

**Discussion du 21 février, sur la notion de continuité et ...**

2024\_02\_21 16\_38 Office Lens.pdf

23 FÉVR. 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

11:10

**Histoire de la topologie**

⚠ Point set topology = topologie générale  $\neq$  topologie algébrique  $\cong$  combinatorial topology.

En chapeau des deux : la notion de topos (<https://inference-review.com/article/un-pays-dont-on-ne-connaissait-que-le-nom>).

- La notice Wikipedia "Topologie" (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Topologie>).
- A history of Topologie sur MacTutor (en anglais, traduction en français depuis Chrome).



- Qq notes d'un cours de L3 (<https://math.univ-lille1.fr/~zhang/enseignements/L303A/M303Intro.pdf>)
- J-C. Pont, Petite enfance de la topologie algébrique, 1974 (<https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/ponthistpetit.pdf>)
- Ch. Kassel, \*Cent ans de la topologie algébrique\*, 2002 (<https://irma.math.unistra.fr/~kassel/Centans210502.pdf>)

- James, *Combinatorial Topology versus Point-set Topology*, extrait du *Handbook of the History of General Topology*, 1997. Traduction en français via le site web DeepL. Ce n'est pas facile à lire : beaucoup de prérequis.
- Horst Herrlich & George Strecker, *Categorical Topology – Its Origins,...*, extrait du *Handbook of the History of General Topology*, 1997. Sur SpringerLink ([https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0468-7\\_15](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-0468-7_15)).
- Les notices historiques de Bourbaki, rassemblé dans l'ouvrage [Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques*, 1984], disponible à la BU ([https://catalogue.bu.univ-cotedazur.fr/primos-explore/search?query=creator,contains,bourbaki,AND&query=any,contains,histoire,AND&tab=default\\_tab&search\\_scope=all&sortBy=date&vid=UCA&facet=frbrgroupid,include,3481355493&mode=advanced&offset=0](https://catalogue.bu.univ-cotedazur.fr/primos-explore/search?query=creator,contains,bourbaki,AND&query=any,contains,histoire,AND&tab=default_tab&search_scope=all&sortBy=date&vid=UCA&facet=frbrgroupid,include,3481355493&mode=advanced&offset=0)).
- Une excellente vidéo sur Arte.tv ([https://www.youtube.com/watch?v=czY7sp5c\\_Xs](https://www.youtube.com/watch?v=czY7sp5c_Xs)) au sujet de la conjecture de Poincaré.



([https://www.youtube.com/watch?v=czY7sp5c\\_Xs](https://www.youtube.com/watch?v=czY7sp5c_Xs))

1 MARS 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

14:32

### Références pour la topologie générale :

1. [Tai-Danae Bradley, Tyler Bryson, and John Terilla, *Topology a Categorical Approach*, 2020] disponible à l'adresse <https://topology.mitpress.mit.edu/> (<https://topology.mitpress.mit.edu/>)
2. Plus classique : le cours de topologie de G. Choquet, disponible à la BU ([https://catalogue.bu.univ-cotedazur.fr/permalink/f/11hf8mm/33UCA\\_KOHA79190](https://catalogue.bu.univ-cotedazur.fr/permalink/f/11hf8mm/33UCA_KOHA79190)).

### Références pour les variétés $C^k$ ?

3. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~patrick.massot/enseignement/mat553/> (<https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~patrick.massot/enseignement/mat553/>)

La 1ère référence a exactement le point de vue qui convient.

Tout ceci est donné en complément et n'a rien d'indispensable. La seule chose indispensable est de comprendre ce qu'est une sous-variété (topologique, différentiable, lisse) de  $\mathbb{R}^q$  et ce que sont les applications continues et les homéomorphismes d'un polytope de  $\mathbb{R}^p$  dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^q$ .

## # Discussion sur le sujet > homeomorphisme entre le triangle et le cercle $S^1$

13 MARS 2024



**Sanou Wourozou**

13:27

homeomorphisme entre un triangle et un cercle.pdf

## # Discussion sur le sujet > Questions de continuité

15 MARS 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

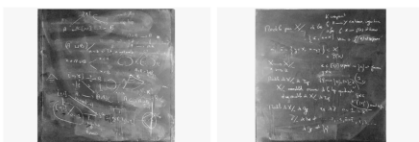
19:59

### Discussion du 13 mars

1. Espaces topologiques quotient, somme amalgamée d'espaces (critique de homeomorphisme entre un triangle et un cercle.pdf).

tableau 1

tableau 2



### MODIFIÉ 2. Références pour la topologie quotient

20:14

- Pas d'occurrence dans le livre de Choquet *Cours de topologie*
- Section 1.3 (chap.I) du livre de Tai-Danae Bradley, Tyler Bryson, and John Terilla cité plus haut
- Bourbaki ?

### 3. Exemples d'espaces topologiques quotients

Quotient de la sphère par l'action d'antipodie.

J-P. Petit, *Le topologicon*, disponible à l'adresse <https://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/topologicon.htm> (<https://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/topologicon.htm>)

## # Discussion sur le sujet > (no topic)

27 MARS 2024



Sanou Wourozou

homéo\_triangle\_cercle.pdf

08:01

MODIFIÉ (deleted)

11:11

## # Discussion sur le sujet > Exemples de surfaces

10 AVR. 2024



F-X. Dehon MODIFIÉ

Discussion du 27 mars et du 10 avril

15:49

- Surfaces données par un paramétrage ou par un système d'équations  
Exemple : la sphère  $S^2$  : paramétrage par les coordonnées sphériques, équation cartésienne habituelle  $x^2+y^2+z^2=1$  dans  $\mathbb{R}^3$ .  
le tore  $T \simeq S^1 \times S^1$  : paramétrage comme surface dans  $\mathbb{R}^3$  ? Equation(s) comme surface dans  $\mathbb{R}^3$  ? ou dans  $\mathbb{R}^4$  ?  
Equation au sens  $T = \{x, f(x)=0\}$  où  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable de gradient non nul sur  $T$  (équation régulière).  
2024\_03\_27-16\_29-Office-Lens.jpg  
2024\_04\_10-15\_13-Office-Lens-1.jpg  
2024\_04\_10-15\_13-Office-Lens-2.jpg



- Découpage en morceaux  $\rightsquigarrow$  triangulations par morceaux
- $f: E \rightarrow F$  application continue surjective  $\rightsquigarrow$  factorisation canonique  $E/\sim \rightarrow F$  bijection continue. Si  $F$  est séparé et  $E$  est compact alors  $f: E/\sim \rightarrow F$  est un homéomorphisme. Contre exemple évident si  $F$  n'est pas séparé : prendre  $F=E$  avec la topologie grossière. Contre exemple si  $F$  est séparé et  $E$  non compact ?
- Question du jour : La somme amalgamée de  $pt \leftarrow \partial D^2 \rightarrow D^2$  s'identifie à la sphère, on peut même donner l'expression en coordonnées polaires d'une application  $D^2 \rightarrow S^2$ ,  $(0, \alpha) \mapsto$  pôle Nord,  $(1, \alpha) \mapsto$  pôle Sud qui induit un homéomorphisme de la somme amalgamée sur la sphère.
- Triangulation du tore avec un petit nombre de sommet dans le livre de Felix & Tanré.

## # Discussion sur le sujet > équation du tore



Sanou Wourozou

équation du tore.pdf

17:02

## # Discussion sur le sujet > homéomorphisme entre $(D^2/S^1)$ et $S^2$



Sanou Wourozou

homeo.pdf

17:18

## # Discussion sur le sujet > Le sujet

19 MAI 2024

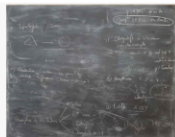


F-X. Dehon MODIFIÉ

Discussion du 16 et 17 mai

2024\_05\_19-18\_13-Office-Lens.jpg

Exemples de rédaction (la ligne claire ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne\\_claire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ligne_claire)) ?) :



18:53

- A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, 1957 ([https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier\\_dehon\\_unice\\_fr/Eb0UHcxiyDNBgClOdp7troYB\\_xySS8aGEhLWgHzgsv7Mw?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=T8bd1z](https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier_dehon_unice_fr/Eb0UHcxiyDNBgClOdp7troYB_xySS8aGEhLWgHzgsv7Mw?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=T8bd1z))
- J-P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés 1951 ([https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier\\_dehon\\_unice\\_fr/EQcBpWmCJIdCpM1ERwvpR88BP-G4KWBXetSniHd4bBWRwQ?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=6Ot4m0](https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier_dehon_unice_fr/EQcBpWmCJIdCpM1ERwvpR88BP-G4KWBXetSniHd4bBWRwQ?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=6Ot4m0)), notamment II.1 Homologie singulière cubique p439
- H. CARTAN, Complexes simpliciaux, Séminaire Henri Cartan, tome 1 (1948-49) ([https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier\\_dehon\\_unice\\_fr/EcyLX7XW-i1FvVT1kb\\_-hHoB-FPZoY5DHC6FavvNrHPjxA?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=Pnf5pn](https://unice-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/francois-xavier_dehon_unice_fr/EcyLX7XW-i1FvVT1kb_-hHoB-FPZoY5DHC6FavvNrHPjxA?email=wourozou.sanou%40etu.univ-cotedazur.fr&e=Pnf5pn)) Cf [http://www.numdam.org/volume/SHC\\_1948-1949\\_\\_1/](http://www.numdam.org/volume/SHC_1948-1949__1/) ([http://www.numdam.org/volume/SHC\\_1948-1949\\_\\_1/](http://www.numdam.org/volume/SHC_1948-1949__1/))

- S. Eilenberg, Singular Homology Theory, 1944 ([https://unice-my.sharepoint.com/:b:/r/personal/francois-xavier\\_dehon\\_unice\\_fr/Documents/Ens23-24/stage%20M1%20triangulations/Eilenberg\\_SingularHomologyTheory-44.pdf?csf=1&web=1&e=iOEx5X](https://unice-my.sharepoint.com/:b:/r/personal/francois-xavier_dehon_unice_fr/Documents/Ens23-24/stage%20M1%20triangulations/Eilenberg_SingularHomologyTheory-44.pdf?csf=1&web=1&e=iOEx5X))

## # Discussion sur le sujet > équation du tore

21 MAI 2024



F-X. Dehon MODIFIÉ

12:18

### Test de la réponse avec Sagemath

- Paramétrisation

```
var('s t')
parametric_plot3d([(2+cos(t))*cos(s), (2+cos(t))*sin(s), sin(t)], (t, 0, 2*pi), (s, 0, 2*pi))
```

Exécution sur SageMathCell <https://sagecell.sagemath.org/>?

z=eJwrSyZSUC9WKFX5OUqSCxKzE0tKcpMji\_lyS8xTtG1jDSTs4v1ijR1NQc0cWaOkgixZl5IBEQValZq6NRomOgY6RVkAlUVxjagIAvu0cig==&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==)

- Equation

```
f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 5)^2 / 16 + z^2 - 1
implicit_plot3d(f(x, y, z) == 0, (x, -3, 3), (y, -3, 3), (z, -1, 1))
```

Exécution sur SageMathCell <https://sagecell.sagemath.org/>?

z=eJxL06jQqdSp0rTVqIgz0q4E4qo4I11TzTgjfUMzMNuQlysztyAnMzmmzJL4gJ7\_EOEUjDabJ1kAHyNQ11jHW1NGohDGqdHQNdQw1NQHKmxjQ&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ==)

## # Discussion sur le sujet > (pas de sujet)



F-X. Dehon MODIFIÉ

18:44

### Discussion du 21 mai

- Mémoire à rendre le 2 juin ?** Commencer par prendre des notes sur la triangulation par quelques exemples, le complexe de chaînes et les groupes d'homologie associés, en suivant les notes de cours (<https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/M2topalg/08-09/c0.pdf>).

Il ne s'agit pas de tout réécrire mais plutôt de **mettre en oeuvre sur des exemples**. Pour que le texte soit compréhensible on écrit précisément les définitions, les constructions et les énoncés en donnant les propriétés dont on se sert, et on donne une référence précise pour les preuves qu'on ne recopie pas.

**Les exemples sont :** la sphère en dimension quelconque, le tore en dimension 2, la somme connexe ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme\\_connexe](https://fr.wikipedia.org/wiki/Somme_connexe)) de deux tores, la bouteille de Klein, l'espace projectif complexe  $P_2(\mathbb{C})$  (stratégie de triangulation ?).

**Une percée envisageable :**  $P_2(\mathbb{C})$  et le bouquet  $S^2 \vee S^4$  ont même homologie mais on peut les distinguer par les applications induites en homologie de la "diagonale"  $P_2(\mathbb{C}) \rightarrow P_2(\mathbb{C}) \times P_2(\mathbb{C})$  et  $S^2 \vee S^4 \rightarrow (S^2 \vee S^4) \times (S^2 \vee S^4)$  qu'il s'agit alors de modéliser simplicialement.

- Edition du mémoire en LaTeX sur Overleaf** (<https://fr.overleaf.com/>) (nécessite une connexion internet)

image.png



- Comment  $\mathbb{N}$  peut-il être disjoint de  $\mathbb{N}$  dans la somme disjointe  $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$  ? **Produit, somme dans une catégorie** ([https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie\\_des\\_cat%C3%A9gories](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_cat%C3%A9gories)), modèle pour la somme  $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$  dans  $\mathcal{E}ns$ . 2024\_05\_21-18\_48-Office-Lens.jpg



## # Discussion sur le sujet > Rédaction - LaTeX

22 MAI 2024



F-X. Dehon MODIFIÉ

14:54

Document LaTeX éditable partagé sur Overleaf (<https://fr.overleaf.com/3621334143ypksqpkwtbvk#fd369e>)  
Il faut avoir un compte (gratuit) sur Overleaf pour en profiter.

## # Discussion sur le sujet > triangulation de l'espace $CP^2$

27 MAI 2024



Sanou Wourozou

08:44

cf85b10f-edd1-48b5-8922-d6272aa0c93a.jpg



## # Discussion sur le sujet > (no topic)



**Sanou Wourozou**

08:48

Bonjour Professeur, j'aimerais savoir si cette triangulation de l'espace  $CP^2$  avec 9 sommets marche



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

12:31

Sanou Wourozou said:

Bonjour Professeur, j'aimerais savoir si cette triangulation de l'espace  $CP^2$  avec 9 sommets marche

Bonjour,

Votre triangulation est de dimension 2 (simplexes de dimension au plus 2), n'est ce pas ?

Mais  $CP^2$  est de dimension 4 comme sous variété de  $\mathbb{R}n$ ; il faut des simplexes de dimension 4. Quant à  $S^5$  il est de dimension 5.

Par ailleurs le quotient par  $S^1$  n'est pas le quotient par une sous-variété de  $S^5$  (on identifie tous les points de  $S^1$  entre eux) mais le quotient d'une action de groupe, c'est bien plus compliqué à modéliser. Il faut laisser cela pour plus tard.

## # Discussion sur le sujet > (pas de sujet)

1 JUIN 2024

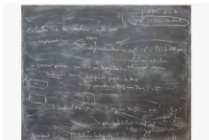


**F-X. Dehon** MODIFIÉ

18:54

### Discussion du 24 mai :

5879bd9a-d2e0-4df6-ae08-b8f7a340f044.jpg

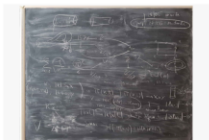


### Discussion du 28 mai :

Prendre des notes de lecture comme premier pas vers la production d'un écrit (d'un mémoire), ne pas se noyer dans la lecture.

### Discussion du 31 mai

dd16fb54-93fb-4c33-9aed-b99494a0d102.jpg



- Complexes simpliciaux ou Delta-complexes comme modèles combinatoires des espaces topologiques. Chacun a ses avantages et inconvénients. Dans les deux cas la définition combinatoire est très éloignée de l'objet géométrique qu'on modélise. Préférer la construction cellulaire itérée : modèle du simplexe standard, des morphismes entre simplexes puis sommes amalgamées.
- Rédiger la notion de somme amalgamée et de produit fibré dans les catégories Espaces topologiques, Compl. simpliciaux, Delta-complexes (dans un second temps), Groupes abéliens. Puis observer à quelle point la réalisation géométrique d'une part, l'homologie d'autre part sont compatibles avec les sommes amalgamées et les produits.
- Rédaction : être précis sur les définitions, les constructions, les énoncés. Maîtriser chaque terme d'un énoncé. Dans un premier temps (et il n'y en aura peut-être pas de second) faire une référence précise à une preuve déjà écrite plutôt que réécrire la preuve.
- Objectif du mémoire : élaborer et mettre en oeuvre des stratégies de triangulation de la sphère, du tore et de la bouteille de Klein, du tore à  $n$  trous, puis calculer les groupes d'homologie. Modéliser la diagonale  $X \rightarrow X \times X$  et calculer le morphisme induit en homologie pour  $X$ =chacun des précédents objets.

6 JUIN 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

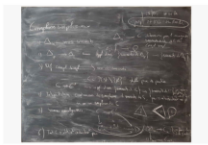
09:55

### Discussion du 4 juin

2024\_06\_06-09\_52-Office-Lens.jpg

Catégorie des complexes simpliciaux versus des delta-complexes : comparer la définition des objets et des morphismes, comparer les sommes amalgamées et leur compatibilité avec la réalisation géométrique.

Référence pour les delta-complexes

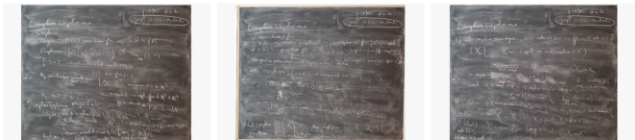


## Discussion du 6 juin

2024\_06\_06-10\_21-Office-Lens.jpg

2024\_06\_06-10\_50-Office-Lens.jpg

2024\_06\_10-14\_03-Office-Lens.jpg



### Références :

[A. Hatcher, Algebraic Topology, p106-] (<https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf#page=106>)

## # Discussion sur le sujet > schéma de la rédaction

10 JUIN 2024



**Sanou Wourozou**

12:29

Bonjour Professeur, j'aimerais si possible avoir votre avis sur le schéma que je suis en train de suivre pour ma rédaction . Merci.  
Mémoire\_M1.pdf

## # Discussion sur le sujet > (pas de sujet)



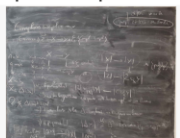
**F-X. Dehon** MODIFIÉ

16:20

## Discussion du 10 juin

- Comment est définie la réalisation géométrique d'un complexe simplicial fini  $X$  :  $X$  est naturellement inclus dans le simplexe standard de sommets les sommets de  $X$  ; la réalisation géométrique de  $X$  est alors une réunion de faces du simplexe standard.
- Comment se compare la réalisation géométrique d'une somme amalgamée avec la somme amalgamée des réalisations géométriques ?  $\rightsquigarrow$  la réalisation géométrique de  $X$  est la *colimite* des réalisations géométriques des simplexes de  $X$ .
- Le quotient  $X/A$  est (par définition) la somme amalgamée de  $pt \leftarrow A \rightarrow X$ . Le quotient d'une triangulation du disque par le bord a pour réalisation géométrique la sphère mais l'application naturelle  $|D|/|\partial D| \rightarrow |D/\partial D|$  n'est pas un homéomorphisme. Les choses se passent beaucoup mieux dans le monde des  $\Delta$ -complexes (aussi appelés ensemble quasi-simpliciaux) mais avec un prix : par exemple la définition de la réalisation géométrique est bien moins élémentaire.

image.png



### Objectifs :

- Discuter de la somme amalgamée dans une catégorie abstraite et donner des exemples dans la catégorie des ensembles, des groupes, des espaces topologiques, des complexes simpliciaux.
- Etudier avec des exemples (la sphère, le tore) la somme amalgamée de complexes simpliciaux vis a vis de la réalisation géométrique et des groupes d'homologie.
- Etudier la diagonale du Tore en homologie  $T \rightarrow T \times T$ .

### Conseil :

- **Prendre systématiquement des notes** (manuscrites), **retravailler ces notes** pour en faire des **synthèses concises et efficaces** (manuscrites) en ayant toujours l'**objectif en vue** (ce qu'on a à dire).

14 JUIN 2024



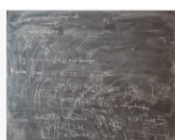
**F-X. Dehon** MODIFIÉ

19:36

## Discussion du 12 juin :

1. L'approximation simpliciale

2024\_06\_12-15\_37-Office-Lens.jpg



2. Triangulation de l'espace produit, diagonale.

$K, L$  complexe simpliciaux. On triangule  $|K| \times |L|$  relativement au choix d'un ordre total (ou de façon équivalente une

numérotation) des sommets de  $K$  et des sommets de  $L$ .  $S_{\{K \times L\}} = S_{K \times L}$  et les simplexes de  $K \times L$  sont les parties totalement ordonnées de  $S_{K \times L}$  pour l'ordre produit.

A t-on besoin d'approximer la diagonale ? Non !

2024\_06\_12-16\_25-Office-Lens.jpg

2024\_06\_14-09\_06-Office-Lens-2.jpg



MODIFIÉ **Discussion du 14 juin :**

19:44

**Rédaction avec Joplin ou Wordpad pourvu qu'on ait la fonction copier-coller d'images ; export en pdf**

**Représentation d'un complexe simplicial, calcul de son homologie avec des fonctions prédéfinies Sagemath :**

- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex.html)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex.html))
- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_examples.html#sage.topology.simplicial\\_complex\\_examples.Torus](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_examples.html#sage.topology.simplicial_complex_examples.Torus)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_examples.html#sage.topology.simplicial\\_complex\\_examples.Torus](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_examples.html#sage.topology.simplicial_complex_examples.Torus))
- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_morphism.html)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_morphism.html))

Experimentation avec SagemathCell (<https://sagecell.sagemath.org/>)

`z=eJwrzswtyMIMzkzMiU_OBzJTK1KL9bxzUjPznPJLSnJSNTT1MvJz83Py0ys1NAGbGhEg&lang=sage&interacts=eJyLjgUAARUAuQ=`  
=)

La même chose avec les Delta-complexes :

- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/delta\\_complex.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/delta_complex.html)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/delta\\_complex.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/delta_complex.html))

**Chat AI de Cocalc sur le sujet de l'homologie de la bouteille de Klein**

Google-AI-Gemini-Homologie-bouteille-de-Klein-14juin24.png



# Discussion sur le sujet > Post-soutenance

1 JUIL. 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

12:24

**25 juin, 1 juillet 2024**

Quelque part dans la documentation de Sagemath est mentionnée le morphisme induit en homologie par un morphisme entre complexes simpliciaux et le cas particulier de la diagonale. Sans doute ici et là :

- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/homology/sage/homology/homology\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/homology/sage/homology/homology_morphism.html)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/homology/sage/homology/homology\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/homology/sage/homology/homology_morphism.html))
- [https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_morphism.html)  
([https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial\\_complex\\_morphism.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/topology/sage/topology/simplicial_complex_morphism.html))

**Un exemple de calcul avec Sagemath** ([https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/Sagemath/Homologie\\_diagonale.html](https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/Sagemath/Homologie_diagonale.html))  
(mise à jour 4 juil). La fin nous laisse sur notre faim !

**A faire :** Suivre à la main le calcul de l'homologie de la sphère  $S^2$  et du produit  $S^2 \times S^2$ .

Comment définirait on une famille génératrice adéquate de l'homologie de chaque terme ? Comment décrirait on à l'aide de ces familles génératrices le morphisme induit en homologie ?

2 JUIL. 2024



**F-X. Dehon** MODIFIÉ

15:41

**2 juil 24 :** Calculs sur Sagemath ([https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/Sagemath/Homologie\\_diagonale-4juil24.pdf](https://math.univ-cotedazur.fr/~dehon/Ens/Sagemath/Homologie_diagonale-4juil24.pdf)) mis à jour.

Le complexe simplicial produit shuffle de la bouteille de Klein par elle même est très gros ; il conduit à des calculs d'homologie très (trop) lents. ↪ Meilleurs modèles combinatoires ? Oui : produit catégorique ou bien nerf d'un recouvrement adapté.



**Sanou Wourozou**

15:45

Les références du document de topologie algébrique que j'ai pris à la bibliothèque du laboratoire  
Elements of Algebraic Topologie .pdf