HISTOIRE

Une histoire des séries infinies d'Oresme à Euler

Marc-Antoine Coppo

Le texte qui suit, issu d'un cours d'histoire des mathématiques dispensé à l'université de Nice, retrace dans ses grandes lignes directrices l'histoire des séries infinies depuis la période médiévale jusqu'à Euler.

On commence par évoquer la brillante et novatrice contribution d'Oresme datant du milieu du 14^{e} siècle dans laquelle est introduite pour la première fois, sous le nom de « tout », la notion même de somme d'une série infinie, incluant aussi bien le cas d'une série convergente que d'une série divergente telle que la série harmonique. Si elles accèdent alors au statut d'objet mathématique à part entière, les séries n'ont encore, à cette époque, que très peu d'applications et sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique du concept d'infini. Tout change au 17^{e} siècle avec l'invention « mirifique » des logarithmes et le développement rapide des techniques d'intégration. Sous l'impulsion de Mengoli, Wallis, Newton et Gregory, notamment, les séries connaissent alors un extraordinaire renouveau et deviennent un outil fondamental du calcul infinitésimal. Enfin vient, avec le siècle des Lumières, l'âge d'or des séries caractérisé par une profusion de splendides identités découvertes par Euler, ainsi que par la mise en œuvre des premières méthodes systématiques de sommation des séries divergentes.

Le regard porté sur ces trésors de la littérature scientifique classique est celui d'un mathématicien avant tout désireux d'en éclairer la signification d'un point de vue contemporain. Cette relecture du passé, qui fait notamment usage de formulations et d'interprétations modernes souvent assez éloignées des énoncés originels (sauf en ce qui concerne le 18^{e} siècle) nous paraît, en dépit des risques de simplification et d'anachronisme qu'elle comporte, la mieux à même de retracer l'origine et l'évolution des idées et de les relier à des savoirs et des questionnements actuels.

La période médiévale

Le Français Nicole (Nicolas) Oresme est considéré comme le premier savant à avoir développé, dans ses *Questions sur la Géométrie d'Euclide* rédigées au milieu du 14^{e} siècle, une « théorie des séries » incluant une règle permettant de calculer la somme d'une série géométrique ainsi qu'une démonstration de la divergence de la série harmonique.

Étudiant en logique et en théologie au Collège de Navarre[1] à l'université de Paris, Oresme s'y distingue très vite et en devient grand-maître en 1356. Après

[1] Institut fondé par Jeanne de Navarre, épouse du roi Philippe IV (le Bel), petit-fils de saint Louis.

avoir enseigné pendant six ans au Collège de Navarre, Oresme entame ensuite une brillante carrière ecclésiastico-politique au service du roi Charles V (le Sage) dont il est successivement le secrétaire, le conseiller et le chapelain, sans cesser de s'intéresser aux questions scientifiques. Entre 1370 et 1376, à la demande du roi, il traduit en français la plus grande partie de l'œuvre d'Aristote qu'il enrichit de commentaires critiques (gloses) qui révèlent sa propre pensée scientifique : Oresme formule notamment l'hypothèse de la rotation de la terre sur elle-même en vingt-quatre heures, et celle, tout aussi audacieuse, de l'infinitude de l'univers. Pour le récompenser de ce travail considérable qui contribue au rayonnement de la langue française, le roi le sacrera en 1377 évêque de Lisieux et lui offrira trois anneaux d'or. Oresme meurt en 1382, deux ans après Charles V.

Tant par son style novateur que par son esprit à la fois critique et audacieux, Oresme aura joué un rôle capital dans le passage de la science médiévale à la science moderne.

Somme d'une série infinie

Dans les *Questions sur la Géométrie d'Euclide*, les séries apparaissent comme une représentation mathématique des notions d'infini par division et d'infini par addition introduites par Aristote dans sa *Physique*. En effet, une série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ est construite de telle sorte que, d'une part, chaque nouveau terme est obtenu à partir du terme précédent par division par λ et, d'autre part, chaque nouveau terme vient s'ajouter à la somme des termes précédents, ces deux opérations combinées étant répétées indéfiniment. L'apport conceptuel d'Oresme est d'avoir introduit sous le nom de « tout » la notion même de somme d'une série. Pour Oresme, une série de grandeurs (c'est le seul type qu'il considère) a toujours une somme, tantôt finie, tantôt infinie. Par son degré de généralité, cette conception très novatrice pour l'époque, qui dépasse le point de vue physique d'Aristote, permet d'affirmer qu'Oresme a jeté dans ses *Questions* les premières bases d'une théorie des séries infinies.

Oresme énonce en particulier une règle qui permet de calculer le tout (i.e. la somme) de la série géométrique de raison $\frac{1}{\lambda}$ pour un rationnel $\lambda > 1$, règle qui peut se traduire dans le langage moderne par la formule :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{\lambda^4} + \cdots = \frac{1}{\lambda - 1}\,.$$

Cependant, il ne donne aucune démonstration ni même la moindre indication sur la manière dont il a trouvé cette « règle ».

En superposant verticalement des rectangles de base 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, etc. puis en divisant indéfiniment horizontalement chacun de ses rectangles, Oresme parvient aisément à calculer la somme[2] :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2\,.$$

[2] L'identité $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 2$ semble avoir été découverte à la même époque par l'anglais Richard Suiseth dit Le Calculateur, mais sa formulation est particulièrement obscure : voir p. 266 du livre de Boyer cité en référence.

D'autres résultats du même type donnés également par Oresme laissent penser qu'il aurait eu connaissance de la règle plus générale :

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda^3}+\frac{4}{\lambda^4}+\cdots=\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}$$

calculant la somme obtenue en effectuant le produit de deux séries géométriques de même raison, bien qu'il ne l'ait jamais explicitée

Divergence de la série harmonique

Le résultat le plus remarquable obtenu par Oresme dans ses *Questions* est la démonstration de la nature infinie de la somme de la série harmonique[3]. Rappelons qu'il s'agit du problème de la sommation de la série des inverses des nombres entiers naturels :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

La divergence vers l'infini de cette série est un résultat non trivial et, en apparence, très surprenant au regard de la croissance extrêmement lente de ses sommes partielles : on peut ainsi montrer qu'il faut ajouter plus de 10^{43} termes[4] de la série pour que la somme dépasse (enfin) 100. Cependant, l'intuition d'Oresme n'était pas de nature numérique, mais géométrique.

L'idée d'Oresme consiste à faire apparaître des groupes de 2^n termes consécutifs (pour $n=1,2,3,\ldots$) tous supérieurs à $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}1 &+ \frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})\\ &+ (\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+\cdots=1+\frac{1}{2}+A_1+A_2+\cdots\end{aligned}$$

avec

$$A_1=(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},$$

$$A_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}A_3 &= \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\\ &> \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

De manière générale,

$$A_n=\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}$$

est supérieur à 2^n fois $\frac{1}{2^{n+1}}$ c'est à dire à $\frac{1}{2}$. Il en résulte que :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}=1+\frac{1}{2}+A_1+A_2+A_3+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

---

3 Du grec *harmonia* qui signifie « juste rapport ».

4 Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

Or, la série de droite contenant une infinité de termes égaux à $\frac{1}{2}$, Oresme en conclut qu'« *il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'un pied, donc le tout sera infini* » . On remarquera qu'Oresme a raisonné sur la somme de la série considérée *a priori* avant même de savoir si elle est finie ou infinie.

Conclusion

À la fin du 14^{e} siècle, les séries acquièrent progressivement un statut mathématique à part entière mais, ne trouvant encore que très peu d'applications, elles sont surtout considérées comme un approfondissement mathématique des concepts d'infini par division et d'infini par addition.

Le renouveau du 17^{e} siècle

Le 17^{e} siècle est marqué par un extraordinaire renouveau de l'intérêt pour l'étude des séries en relation avec deux découvertes fondamentales : l'introduction des logarithmes[5] par John Neper (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Edimbourg, 1614) et Henry Briggs (*Arithmetica logarithmica*, Londres, 1624) d'une part, et le développement du calcul intégral par Cavalieri, Wallis puis Newton d'autre part. Ces deux directions se rejoignent au milieu du siècle avec la découverte que l'aire sous l'hyperbole est une fonction logarithmique, qu'on appelle alors « logarithme hyperbolique ».

Logarithme hyperbolique et série harmonique

Le prêtre italien Pietro Mengoli (1626-1686) suit l'enseignement de Cavalieri à l'université de Bologne. Après la mort de son maître en 1648, il lui succède comme professeur de mathématiques dans cette même université. Mengoli commence par retrouver, aux alentours de 1650, le résultat d'Oresme sur la divergence de la série harmonique en observant que :

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}$$

puis, en regroupant les termes de la série harmonique trois par trois, il obtient alors la majoration :

$$\begin{aligned} 1 &+ (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10})+\cdots>1 \\ &+ \frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\cdots=1+1+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\text{ etc.} \end{aligned}$$

qui montre que la somme de la série ne peut être finie.

Au cours de ses recherches sur le logarithme hyperbolique, Mengoli est surtout le premier mathématicien à avoir calculé, en 1659, la somme de la série harmonique *alternée* :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

[5] Du grec *logos* (raison) et *arithmos* (nombres), littéralement « nombres de raisons ».

Pour cela, Mengoli remarque que :

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2n} &= (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}) \\ &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

puis il montre que, lorsque n devient infiniment grand, la quantité $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ devient infiniment proche de $\ln(2n)-\ln(n)=\ln 2$. Ce remarquable résultat sera plusieurs fois retrouvé durant la décennie suivante, notamment par Brouncker et Newton. Comme l'écrit R. Godement[6] : « *Il est difficile de ne pas déduire de ces raisonnements et de ces calculs que Mengoli avait déjà une idée assez claire de ce que sont un nombre et une intégrale* ».

Mengoli remarque également que :

$$\frac{1}{(n+1)(n+1)}<\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

d'où il déduit l'inégalité portant sur les séries :

$$\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{4.4}+\frac{1}{5.5}+\ldots<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=1$$

qui montre que la série des inverses des carrés parfaits a pour somme un nombre inférieur à 2, mais Mengoli échoue à calculer la valeur *exacte* de cette somme, célèbre problème qui ne sera résolu que 80 ans plus tard par Euler[7].

Produit infini de Wallis

À l'issue de la seconde Guerre Civile anglaise où il s'était notamment distingué par son aptitude à déchiffrer les codes secrets des Royalistes, John Wallis (1616-1703) est nommé en 1649 professeur de Géométrie à l'université d'Oxford (Savilian Chair) sur recommandation de Cromwell, poste qu'il occupera pendant 53 ans. En 1655-56, Wallis publie un important mémoire intitulé *Arithmetica infinitorum* (l'Arithmétique de l'infini) qui est considéré comme le premier traité d'analyse de l'histoire (c'est notamment dans cet ouvrage qu'on trouve pour la première fois le symbole ∞ pour désigner l'infini).

Wallis étend la formule $\int_0^1 x^a dx=\frac{1}{a+1}$ que Cavalieri avait établie pour a entier à tout rationnel $a=\frac{n}{m}$. C'est en interpolant la quantité $\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$ qui représente l'aire d'un quart de cercle de rayon 1 par les valeurs des quantités $\int_0^1(1-x^{\frac{1}{m}})^n dx$ pour n et m entiers (qu'il sait calculer), que Wallis découvre, à l'issue « *d'une des plus audacieuses investigations par intuition et analogie qui aient jamais abouti à un résultat correct*[8] », le célèbre produit infini qui porte son nom :

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\times\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\times\frac{6\cdot 8}{7\cdot 7}\times\cdots$$

[6] Voir p. 388 du tome I du livre de Godement cité en référence.
[7] Voir la section suivante.
[8] Selon le commentaire de C.H. Edwards : voir p. 171 du livre d'Edwards cité en référence.

et qui peut encore s'écrire[9] :

$$\frac{\pi}{4} = (1 - \frac{1}{3^2})(1 - \frac{1}{5^2})(1 - \frac{1}{7^2}) \cdots$$

Les techniques d'intégration « par interpolation » employées par Wallis dans son *Arithmetica infinitorum* tomberont assez rapidement en désuétude, cependant elles auront une profonde influence sur les mathématiciens anglais de la génération suivante, tout particulièrement sur le jeune Newton qu'elles conduiront notamment à la découverte de la célèbre série du binôme.

Série du binôme de Newton

Issac Newton (1642-1727) entre au Trinity College de Cambridge[10] en juin 1661. Il étudie de manière approfondie les ouvrages d'Euclide, Viète, Descartes et Wallis. À partir de 1665, il introduit des idées particulièrement novatrices en analyse qui font jouer un rôle central aux séries infinies : il montre notamment comment celles-ci permettent d'exprimer un grand nombre de quadratures. Sa méthode consiste à développer la fonction à intégrer en série de puissances puis à intégrer terme à terme en suivant la règle $x^m \to \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$ qu'il a apprise en étudiant l'*Arithmetica Infinitorum* de Wallis, mais qu'il applique à présent à une abscisse x quelconque. C'est en cherchant à exprimer l'aire $I_m(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\, dt$ sous forme d'une série qu'il découvre la fameuse *série du binôme* qui porte désormais son nom :

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3+\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}x^4+\cdots$$

avec $a = \frac{m}{n}$.

En développant $(1-x^2)^a$ pour $a = \frac{1}{2}$ par la formule précédente, et en utilisant l'identité :

$$\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\cdots.(2n-3)}{2.4.6.\cdots.2n},$$

Newton obtient le développement en série de l'intégrale de Wallis :

$$I_1(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt = x - \frac{x^3}{2.3} - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \cdots$$

En développant $(1-x^2)^a$ pour $a = -\frac{1}{2}$ et en utilisant l'identité :

$$\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots.2n},$$

Newton découvre par la même occasion le développement en série de l'arcsinus :

$$y = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \cdots$$

[9] Cette écriture le fait apparaître comme un cas particulier d'une formule bien plus générale découverte près d'un siècle plus tard par Euler : le produit infini de la fonction sinus (voir la section suivante).

[10] Le Trinity College (collège de la sainte Trinité) était le plus important des collèges de Cambridge, fondé en 1546 par le roi Henry VIII.

En 1669, Newton expose ses résultats dans un article fondateur d'une quinzaine de pages au contenu prodigieux, intitulé *De analysi* (Sur l'analyse par équations infinies quant au nombre de termes), qui lui vaut d'occuper à l'âge de 27 ans la prestigieuse Lucasian Chair de mathématiques à l'université de Cambridge[11]. Un peu plus tard, dans *De methodis* (Sur la Méthode des séries infinies et des fluxions) rédigé durant l'hiver 1670-1671, Newton traite de nombreux exemples d'utilisation des séries pour le calcul numérique : il expose notamment une méthode de calcul de π reposant sur le développement en série de l'intégrale $\int \sqrt{x - x^2} dx$ grâce à la formule du binôme précédemment découverte. Plus précisément, Newton obtient l'identité :

$$\int_0^x (t - t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \cdots$$

qu'il applique pour $x = \frac{1}{4}$. Il en déduit :

$$\int_0^{\frac{1}{4}} (t - t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{2}{3}\frac{1}{2^3} - \frac{1}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1}{28}\frac{1}{2^7} - \frac{1}{72}\frac{1}{2^9} - \frac{5}{704}\frac{1}{2^{11}} - \cdots$$

et la convergence très rapide de cette série lui permet de donner une valeur numérique de π avec 16 décimales exactes.

Séries de Gregory

L'Écossais James Gregory (1638-1675), professeur de mathématiques et d'astronomie à l'université de Saint Andrews, avait parfait sa formation mathématique en Italie où il s'était notamment familiarisé avec les méthodes d'intégration de Cavalieri et avait rencontré Mengoli. Il était devenu par la suite un grand admirateur de Newton avec qui il correspondait très régulierement.

En 1675, il découvre, en s'inspirant des idées de Newton, deux séries désormais classiques qui sont restées attachées à son nom :

$$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{1}$$

ainsi que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{2}$$

En particulier la valeur $x = \frac{1}{3}$ dans (1) donne une série qui converge très rapidement vers $\ln 2$:

$$\ln 2 = 2 \times (\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \cdots),$$

et la valeur $x = 1$ dans (2) conduit à la célèbre série alternée de Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Dans une fameuse lettre à Leibniz datant de 1676, Newton fait remarquer au philosophe allemand que la très belle identité précédente n'est qu'un cas particulier

[11] La chaire lucasienne avait été fondée par Henry Lucas et, selon les statuts, le titulaire de la chaire se devait d'exposer « une partie de la géométrie, de l'astronomie, de l'optique ou de tout autre discipline mathématique ». Les premiers cours de Newton eurent très peu de succès.

de la série (2) de Gregory (dont Leibniz ignore tout des travaux). Newton indique lui-même (sans démonstration) une identité analogue :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots$$

dont on peut supposer qu'il l'a obtenue en intégrant terme à terme entre 0 et 1 le développement :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) \\ &= (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \cdots) + (x^2 - x^6 + x^{10} - x^{14} + \cdots) \end{aligned}$$

Ce résultat sera retrouvé et généralisé au siècle suivant par Euler qui montrera par exemple que :

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

et

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \cdots$$

Conclusion

À la fin du 17e siècle, les séries ne sont plus considérées comme de simples curiosités mathématiques mais sont devenues sous l'impulsion de Newton et Gregory un outil fondamental du calcul infinitésimal. La voie est désormais ouverte pour le flot de développements en séries qui déferlera au siècle suivant.

L'Âge d'or

Le 18e siècle peut être considéré comme le véritable âge d'or des séries infinies en raison de la place exceptionnelle qu'elles occupent dans les travaux du plus grand mathématicien de ce siècle, Léonhard Euler.

Fils d'un théologien protestant, Euler nait à Bâle (Suisse) en 1707 et meurt 76 ans plus tard à Saint Petersbourg (Russie). Dans sa jeunesse, il suit l'enseignement de Jean (Johann) Bernoulli, célèbre mathématicien de son temps qui décèle très tôt chez son élève de prodigieuses capacités de mémorisation. À l'âge de 19 ans, l'Académie des sciences de Paris lui décerne un prix pour ses premiers travaux. Un an plus tard, il rejoint Daniel Bernoulli (un des fils de Jean) à l'Académie de St Petersbourg, un centre de recherche très important, où il reste 14 ans et écrit plus d'une centaine d'articles. Dès les années 1735-1740, la renommée scientifique d'Euler est établie dans toute l'Europe et, après la mort de son maître Jean Bernoulli en 1748, il est unanimement considéré par ses pairs comme le plus grand mathématicien vivant. En 1741, Euler quitte St Petersbourg pour rejoindre l'Académie des sciences de Berlin où il passe 25 ans. Ses relations avec Frédéric II de Prusse s'étant dégradées, il retourne à St Petersbourg en 1766, à la demande pressante de Catherine II de Russie qui lui réserve un accueil princier[12]. Pendant

[12] Amie de Diderot, Voltaire et D'Alembert, protectrice des sciences, des arts et des lettres, la tsarine Catherine II a gouverné en « despote éclairée ». Sous son règne, la Russie devint une très grande puissance européenne.

les 17 dernières années de sa vie, bien que quasiment aveugle, Euler trouve encore la force de rédiger, avec l'aide de ses fils et élèves, un important traité d'algèbre et 400 nouveaux articles ! Ses 82 articles spécifiquement consacrés aux séries infinies occupent 4 volumes de ses œuvres complètes *Opera Omnia* et nombre d'entre-eux figurent parmi les plus célèbres.

Euler a également entretenu une correspondance riche et fructueuse avec les plus grands mathématiciens de son temps, notamment avec son ami Christian Goldbach (196 lettres échangées de 1729 à 1764 dont un grand nombre porte sur les séries infinies).

Sa majestueuse *Introductio in analysin infinitorum* (Introduction à l'analyse infinitésimale) en deux volumes publiée en 1748-49 est considérée comme le premier grand traité d'analyse moderne et restera la référence incontournable pour tout mathématicien pendant près de 100 ans. Pour l'historien russe A. Yushkevich, ce livre d'Euler aura joué pour l'analyse un rôle comparable à celui des *Éléments* d'Euclide pour la géométrie.

Résolution du problème de Bâle

La résolution en 1735 du fameux *problème de Bâle*, c'est-à-dire la détermination de la somme de la série des inverses des carrés parfaits, universellement notée $\zeta(2)$, est le premier grand triomphe d'Euler (alors âgé de 28 ans) qui le rend célèbre dans l'Europe entière, notamment en raison de l'élégance et de l'apparente simplicité du résultat. Ce problème avait été initialement posé par Mengoli au milieu du 17^{e} siècle, et les frères Jacques (Jakob) et Jean Bernoulli avaient déployé pendant des décennies une énergie considérable pour le résoudre, mais sans succès décisif.

Dès 1731, Euler avait découvert une brillante transformation de cette série qui permet d'en accélérer la convergence :

$$\zeta(2) = (\ln 2)^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{16.16} + \frac{1}{32.25} + \cdots)$$

C'est à cette occasion qu'il introduit pour la première fois la fonction dilogarithme :

$$\mathrm{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\, dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \cdots$$

qui vérifie $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$ et l'équation fonctionnelle : $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = -\ln x \ln(1-x) + \zeta(2)$. En utilisant le développement : $\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \cdots$, Euler trouve alors la valeur approchée :

$$\zeta(2) = 1,644934\cdots$$

Assez curieusement, la méthode d'Euler pour déterminer la valeur *exacte* de $\zeta(2)$ exposée dans son article fondateur de 1734-35 *De summis serierum reciprocarum* est de nature algébrique. Elle repose sur la remarque suivante : si $P(x)$ est un polynôme de degré n vérifiant $P(0) = 1$ dont les racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, alors il admet la factorisation :

$$P(x) = 1 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^n x^n = (1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_2})\cdots(1 - \frac{x}{\alpha_n})$$

d'où il est facile de déduire, par identification des coefficients, les relations : $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} = a_1$ et $\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n^2} = a_1^2 - 2a_2$. Euler applique alors très audacieusement ces identités à « *l'équation algébrique de degré infini* » :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{z}{6} + \frac{z^2}{120} - \frac{z^3}{5040} + \cdots = 0$$

avec $z = x^2$, dont les « racines » sont précisément $\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, 16\pi^2, \cdots$. D'où il déduit les relations :

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6}$$

et

$$\frac{1}{\pi^4} + \frac{1}{16\pi^4} + \frac{1}{81\pi^4} + \frac{1}{256\pi^4} + \cdots = (\frac{1}{6})^2 - \frac{2}{120} = \frac{1}{90}$$

ce qui donne les extraordinaires formules :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

et

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Bien qu'en apparence très peu rigoureuse (même pour les critères de l'époque) et quasiment miraculeuse, la « démonstration » précédente est en fait justifiée par l'existence d'une factorisation de la fonction sinus en produit infini qu'Euler n'établira (presque) rigoureusement qu'en 1742 :

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= (1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi}) \cdots \\ &= (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \cdots\end{aligned}$$

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{2}$, le produit s'écrit :

$$\frac{2}{\pi} = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{16})(1 - \frac{1}{36})(1 - \frac{1}{64}) \cdots$$

ce qui est encore une autre façon d'écrire la formule de Wallis. Pour $x = \frac{\pi}{4}$, en multipliant le produit obtenu par celui de Wallis, Euler déduit aussi l'intéressante formule pour $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \times \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \times \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \times \frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15} \times \cdots$$

Au début du chapitre X de son *Introductio*, Euler considère une identité générale de la forme :

$$1 - A_1 z + A_2 z^2 - A_3 z^3 + A_4 z^4 - \cdots = (1 - \frac{z}{\alpha_1})(1 - \frac{z}{\alpha_2})(1 - \frac{z}{\alpha_3})(1 - \frac{z}{\alpha_4}) \cdots$$

et, posant $S_p = \frac{1}{\alpha_1^p} + \frac{1}{\alpha_2^p} + \frac{1}{\alpha_3^p} + \frac{1}{\alpha_4^p} + \cdots$, il établit les relations algébriques suivantes :

$$S_1 = A_1\,;$$
$$S_2 = A_1 S_1 - 2A_2; \cdots ;$$
$$S_p = A_1 S_{p-1} - A_2 S_{p-2} + A_3 S_{p-3} - A_4 S_{p-4} + \cdots + (-1)^{p-1} p A_p$$

qui sont une extension aux séries des formules de Newton déjà bien connues pour les polynômes. Il applique alors ces formules de Newton généralisées à l'identité :

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{\pi^2 z}{6} + \frac{\pi^4 z^2}{120} - \frac{\pi^6 z^3}{5040} + \cdots = (1-z)(1-\frac{z}{4})(1-\frac{z}{9})(1-\frac{z}{16})(1-\frac{z}{25})\cdots$$

avec $z = x^2$, ce qui lui permet de calculer de proche en proche les sommes :

$$\zeta(2p) = 1 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{16^p} + \frac{1}{25^p} + \cdots$$

De cette manière, il trouve ainsi :

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,; \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}\,; \cdots ; \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{6825 \times 93555}\,.$$

Dès ses premiers calculs de 1735, il n'avait pas échappé à Euler que la somme $\zeta(2p)$ s'exprimait comme le produit de π^{2p} par un nombre rationnel. Cependant ce n'est que vingt années plus tard, en 1755, qu'il établira, en dérivant logarithmiquement le produit infini de la fonction sinus, la célébrissime relation :

$$\zeta(2p) = \frac{(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}|B_{2p}|$$

qui ramène le calcul des sommes $\zeta(2p)$ à celui des *nombres de Bernoulli*[13] B_{2p}. Euler les calculera de proche en proche jusqu'à B_{34}.

En utilisant des idées analogues, Euler déterminera également les valeurs exactes des sommes *alternées* :

$$L(2p+1) = 1 - \frac{1}{3^{2p+1}} + \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \cdots$$

qui généralisent la série de Leibniz-Gregory :

$$L(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Euler montre en particulier que :

$$L(3) = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}\,,$$
$$L(5) = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots = \frac{5\pi^5}{1536}\,.$$

[13] Cette fameuse suite de nombres aux propriétés remarquables apparaît pour la première fois dans l'*Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli mais ne figure pas explicitement dans l'*Introductio* d'Euler. Sur une suggestion de De Moivre, c'est Euler lui-même qui proposera de les nommer ainsi.

De manière générale, il établit que $L(2p+1)$ est le produit de de π^{2p+1} par un nombre rationnel :

$$L(2p+1) = \frac{\pi^{2p+1}}{2^{2p+1}(2p)!} E_{2p}$$

où les E_{2p} sont désormais appelés les *nombres d'Euler*. Cependant, Euler ne parvint jamais à trouver une formule analogue pour la somme $\zeta(2p+1)$, conjecturant seulement que si $\zeta(2p+1)$ s'écrivait $K\pi^{2p+1}$, alors K devrait être une certaine fonction de p et de $\ln 2$.

Constante d'Euler

Euler précise la relation entre la série harmonique et le logarithme naturel (hyperbolique), déjà remarquée au siècle précédent par Mengoli, en donnant pour la première fois, dans une lettre à Jean Bernoulli, datée de 1740, le développement asymptotique :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \cdots - \frac{B_{2p}}{2pn^{2p}} - \cdots$$

où $C = 0,5772\cdots$ est la célèbre *constante d'Euler* qu'Euler exprime sous forme d'une série *divergente* :

$$C = \frac{1}{2} + \frac{B_2}{2} + \frac{B_4}{4} + \frac{B_6}{6} + \cdots$$

avec $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, etc., en précisant qu'on doit continuer la sommation jusqu'à ce que les termes de cette série alternée commencent à diverger[14].

Ce développement est en fait un cas particulier de la célèbre *formule d'Euler-MacLaurin* qu'Euler connaissait depuis 1734 :

$$f(1) + \cdots + f(n) = \int_1^n f(x)\,dx + C(f) + \frac{1}{2}f(n) + \sum_{k\geqslant 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n)$$

où $C(f)$ est une constante. Si f et ses dérivées successives tendent de manière monotone vers 0 quand x tend vers l'infini, alors : $C(f) = \lim[f(1) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx]$. Dans le cas où $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient la formule précédente.

Sommes d'Euler-Goldbach

À partir d'une série d'échanges épistolaires avec Goldbach datant de l'hiver 1742-1743, Euler entreprend l'étude systématique des séries de la forme :

$$\zeta^\star(m,n) = 1 + \frac{1}{2^m}(1 + \frac{1}{2^n}) + \frac{1}{3^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) + \frac{1}{4^m}(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}) + \cdots$$

qu'on appelle désormais *Sommes d'Euler*. Dans son article de 1775, *Meditationes circa singulare serierum genus*, il montre notamment les remarquables relations :

$$\zeta^\star(2,1) = 2\zeta(3) \quad \text{et} \quad \zeta^\star(3,1) = \frac{1}{2}(\zeta(2))^2 = \frac{\pi^4}{72},$$

[14] C'est ce qu'on appellera au 19e siècle la « sommation au plus petit terme. » La constante C est la somme de la série au sens de Borel.

qui sont en fait deux cas particuliers de sa formule générale :

$$2\zeta^\star(m,1) = (m+2)\zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2} \zeta(m-j)\zeta(j+1)\,.$$

Conséquences arithmétiques de la divergence de la série harmonique

Dans son article de 1737 intitulé *Variae observationes circa series infinitas* (Diverses observations sur les séries infinies), Euler est le premier mathématicien à avoir compris les profondes implications arithmétiques de la divergence de la série harmonique. Il établit en effet une connexion avec la série des nombres premiers au travers de l'identité :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \frac{2.3.5.7.11\cdots}{(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)\cdots}$$

En inversant cette relation, Euler en conclut que :

$$0 = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\cdots$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers. Ceci implique notamment la divergence vers l'infini de la série des inverses des nombres premiers ce qui constitue un raffinement du théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Les travaux d'Euler dans cette direction très prometteuse seront poursuivis au 19e siècle par Dirichlet et Riemann, donnant naissance à la théorie analytique des nombres.

Premières études systématiques des séries divergentes

Dans son article de 1760, *De seriebus divergentibus*, Euler est aussi le premier mathématicien à avoir mis sérieusement en œuvre une théorie systématique d'étude des séries divergentes. Ce type d'objet, bien que d'usage fréquent à l'époque, est encore très mal maîtrisé, donnant lieu à des résultats contradictoires, sources de nombreuses confusions et controverses. Les méthodes de sommation élaborées par Euler vont grandement contribuer à éclaircir la question[15]. L'idée de base d'Euler consiste à identifier la fonction génératrice de la série, puis d'en prendre la valeur (ou la limite) en 1 lorsque c'est possible. C'est de cette manière qu'il justifie l'attribution de la valeur $\frac{1}{2}$ à la somme : $1-1+1-1+1-1+\cdots$ (déjà proposée par Leibniz) en raison du développement géométrique :

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$$

Sa célèbre étude de la série hypergéométrique de Wallis (qualifiée de série divergente *par excellence*) :

$$1-1!+2!-3!+4!-5!+\cdots$$

où il introduit, et résout, l'équation différentielle formellement vérifiée par la fonction génératrice :

$$\varphi(x) = x-1!x^2+2!x^3-3!x^4+4!x^5-5!x^6+\cdots$$

anticipe déjà sur les travaux d'Émile Borel au début du 20e siècle.

[15] Cependant, Euler semble avoir cru, à tort, qu'il était possible d'assigner de façon *univoque* une somme à n'importe quelle série divergente.

Conclusion

La profusion de splendides identités faisant intervenir les séries est un trait remarquable des mathématiques du 18[e] siècle. Après ce feu d'artifice tiré par Euler, les mathématiciens de la génération suivante vont désormais pouvoir se pencher sur les fondements théoriques de l'analyse.

Bibliographie

Livres

Au lecteur désireux d'approfondir l'étude des thèmes survolés dans cet article, on ne saurait trop recommander la lecture des excellents ouvrages qui suivent. À la fois très complet et agréable à consulter, le livre de Boyer est un grand classique généraliste. Le livre d'Edwards expose en détail les calculs de Wallis et de Newton. Les deux premiers volumes du magistral traité d'analyse de Godement contiennent des développements historiques d'un grand intérêt relatés dans un style jubilatoire. Il en est de même des deux premiers chapitres introductifs du classique de Hardy consacré aux méthodes de sommation des séries divergentes. Les chapitres VIII à XI du majestueux traité d'Euler demeureront à jamais une irremplaçable source d'inspiration et d'émerveillement. Enfin, d'une impressionnante érudition conjuguée à une remarquable clarté d'exposition, le livre de Varadarajan constitue certainement la meilleure référence sur les travaux d'Euler concernant les séries infinies.

C. Boyer, U. Merzbach, *A History of Mathematics*, 2[e] édition révisée, John Wiley & Sons, 1991.

C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, SpringerVerlag, 1994. L. Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, tome I, réimpression de l'édition française de 1796, Jacques Gabay, 2007.

R. Godement, *Analyse mathématique* I, 2[e] édition corrigée, Springer Verlag, 2001. R. Godement, *Analyse mathématique* II, 2[e] édition corrigée, Springer Verlag, 2003. G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford, Clarendon Press, 1973.

V. S. Varadarajan, *Euler through time. A new look at old themes*, American Mathematical Society, 2006.

Articles

On pourra ensuite compléter cette étude par la lecture des articles plus spécialisés présentés ci-dessous.

R. Ayoub, *Euler and the Zeta Function*, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 1067-1086.

J. Babb, *Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme*, Science & Éducation 14 (2005), 443-456.

L. Euler, *Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*, Opera Omnia I-14 à I-16 (il s'agit de l'intégrale en quatre volumes des 82 articles d'Euler consacrés aux séries infinies). On pourra également consulter ces articles en ligne sur le site d'archives : `http ://math.dartmouth.edu/ euler/`.

E. Mazet, *La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne*, Revue d'histoire des mathématiques, vol. 9, n° 1 (2003), 33-80.

V. S. Varadarajan, *Euler and his work on infinite series*, Bulletin of the American Mathematical Society, **44** (2007), 515-539

D. T. Whiteside, *Newton's discovery of the general binomial theorem*, Mathematical Gazette, **45** (1961), 175-80.