

Feuille Outils.**Le symbole Σ**

Au lieu d'écrire une somme comme $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, on peut essayer de condenser la notation en

$$\sum_{i=1}^{100} i,$$

qui signifie que l'on fait la somme des entiers i entre 1 (borne d'en bas) et 100 (borne d'en haut). La variable " i " est dite *muette*, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre. Ainsi,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{k=1}^{100} k = \sum_{x=1}^{100} x.$$

Cependant, il est usuel de garder les lettres $i, j, k, \ell, m, n, p, q \dots$ pour désigner des entiers. Si la borne d'en bas est strictement plus grande que la borne d'en haut, la somme vaut par convention 0.

Exercice 1. Employer le symbole Σ .

1) Ecrire les sommes suivantes à l'aide du symbole Σ .

$$7 + 8 + 9 + \dots + 343, \quad -101 + 102 - 103 + \dots + 522 - 523, \quad 151^3 - 153^3 + 155^3 - \dots - 1001^3.$$

2) Combien les sommes suivantes comportent-elles de termes ?

$$\sum_{n=18}^{100} \frac{1}{n}, \quad \sum_{q=67}^{67} q^q, \quad \sum_{\ell=65}^{31} \sin(\ell).$$

3) Exprimer à l'aide d'un seul symbole Σ les expressions suivantes :

$$\sum_{n=0}^{202} n - 2 \sum_{p=1}^{101} p, \quad \sum_{n=1}^{505} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=0}^{252} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4) a) Calculer explicitement les sommes suivantes, dites télescopiques,

$$\sum_{n=15}^{56} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \sum_{n=-5}^7 3^{-n-1} - 3^{-n}.$$

b) Après avoir déterminé deux réels α et β tels que $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{\beta}{2n+3}$ pour tout entier n , calculer explicitement la somme

$$\sum_{n=-14}^{35} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Exercice 2. Raisonement par l'absurde.

1) Démontrer le principe des tiroirs : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors l'un au moins des tiroirs contient au moins deux paires de chaussettes.

2) Prouver que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si l'on dispose de $n+1$ réels $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n$ entre 0 et 1, alors au moins deux de ces réels sont distants de moins de $1/n$. Donner également une preuve à l'aide du principe des tiroirs.

3) a) Soit m et n deux entiers au moins égaux à deux. Prouver que n ne divise pas $nm+1$.

b) Démontrer l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 3. *S'entraîner à récurre.*

1) *Calculs explicites de sommes.* Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a les égalités suivantes

$$0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2) Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = 5 + \sqrt{u_{n+1} + u_n}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que tous les u_n sont bien définis et strictement positifs.

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq 10$.

4) On note $[x]$ la partie entière d'un réel x . On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1000$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \left\lfloor \frac{u_n}{1000} \right\rfloor$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer les u_n pour $0 \leq n \leq 5$. Conjecturer une formule explicite pour u_n .

b) Essayer de prouver cette conjecture, ou de la nier si cela ne marche pas.

5) *Formule du binôme de Newton.* On définit la famille des coefficients binomiaux $\binom{n}{p}_{n,p \in \mathbb{N}}$ par les relations

$$\binom{n}{0} = 1, n \in \mathbb{N}; \quad \binom{0}{p} = 0, p \in \mathbb{N}^*; \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}, n, p \in \mathbb{N}.$$

La dernière relation s'appelle la relation de Pascal.

a) Ecrire les coefficients pour $n \leq 4$ dans un triangle de Pascal.

b) Prouver que le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est un entier naturel, et vaut 0 si $p > n$.

c) Démontrer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p y^{n-p}.$$

d) En déduire une autre démonstration de l'inégalité de Bernoulli.

Exercice 4. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$(\mathcal{P}_n)$ " dans une boîte contenant n feutres, tous les feutres sont de la même couleur. "

• Initialisation : au rang $n = 1$, la propriété est évidente.

• Hérédité : supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$. On considère donc une boîte contenant $n+1$ feutres. On retire un feutre de la boîte : par l'hypothèse de récurrence, tous les feutres restants sont de la même couleur. On remet le feutre, et on retire un autre feutre : toujours par l'hypothèse de récurrence, tous les feutres restants sont de la même couleur, et en particulier le premier feutre que l'on a retiré. Ainsi, tous les feutres sont de la même couleur, ce qui prouve $(\mathcal{P}_{n+1})$ et clôt la récurrence.

On a ainsi prouvé que dans toute boîte contenant des feutres, ceux-ci sont tous de la même couleur.

Exercice 5. Reasonner par analyse-synthèse pour montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.