

Feuille 2.**Borne supérieure**

Ex 1. *Calculs de bornes supérieures.* Soient a et b deux réels strictement positifs. Pour chacune des parties suivantes, dire si elles sont majorées et/ou minorées. Si oui, déterminer leurs bornes supérieure et/ou inférieure et indiquer s'il s'agit d'un plus grand/petit élément.

$$\begin{aligned} A_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{a + bn; n \in \mathbb{N}\}; & A_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}; \\ A_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{a + (-1)^n \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}; & A_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{a(-1)^n + b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right); n \in \mathbb{N}^*\right\}; \\ A_5 &\stackrel{\text{def}}{=} [0, 1] \cap \mathbb{Q}; & A_6 &\stackrel{\text{def}}{=}]0, 1[\cap \mathbb{Q}; \\ A_7 &\stackrel{\text{def}}{=} \{ne^{-2n/11}; n \in \mathbb{N}\}; & A_8 &\stackrel{\text{def}}{=} \{x^2 + y^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, xy = 1\}. \end{aligned}$$

Ex 2. *Écart.* Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note $B \stackrel{\text{def}}{=} \{|x - y|; (x, y) \in A^2\}$.

- 1) Justifier que B est majorée.
- 2) Prouver que $\sup B = \sup(A) - \inf(A)$.

Ex 3. *Encore des bornes supérieures.* On considère les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}; (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}; & A_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{n}{mn+1}; (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}; \\ A_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{n}{mn+1}; (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}. \end{aligned}$$

Pour chacune de ces parties, dire si elles sont majorées et/ou minorées. Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un plus grand/petit élément.

Rationnels et irrationnels

Ex 4. *Nombres décimaux et nombres rationnels.*

1) Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel, écrit sous forme irréductible. À quelle condition nécessaire et suffisante sur b le nombre $\frac{a}{b}$ est-il un nombre décimal ? Est-ce que $\frac{17}{250}$, $\frac{63}{31}$ et $\frac{13}{1547}$ sont des nombres décimaux ?

2) Pour un entier $n \geq 2$, on considère $R_n = \frac{n^2 + 1}{n(n^2 - 1)}$. Calculer R_n pour $n = 2, 3$ et 4 . Existe-t-il des valeurs de l'entier $n \geq 2$ telles que R_n soit un nombre décimal ? Si oui, lesquelles ?

3) Pour chacun des rationnels suivants, déterminer l'écriture décimale périodique et préciser la période :

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{3}{11}, \quad \frac{119}{54}, \quad \frac{119}{14}.$$

4) Exprimer les réels suivants sous la forme d'une fraction (non nécessairement irréductible) :

$$0,002633520152015\underline{201}...., \quad 0,222222\underline{2}...., \quad 3,423171717\underline{17}....$$

Ex 5. *Suite de rationnels.* Soit (u_n) une suite de nombres rationnels. On écrit chaque terme u_n sous forme irréductible : $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n, q_n entiers (premiers entre eux, donc) et $q_n > 0$. On suppose que la suite (u_n) converge vers a .

- 1) On suppose que la suite (q_n) est majorée. Démontrer que (u_n) est stationnaire et que $a \in \mathbb{Q}$.
- 2) On suppose que $a \notin \mathbb{Q}$. Prouver que (q_n) tend vers $+\infty$.

Suites extraites

Ex 6.

- 1) La suite $\left([1 + \cos(n\pi)] \frac{n+5}{2n+7}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
- 2) La suite $\left(\sin(n\pi/5) \frac{n^3+4}{2n^2-7}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Est-elle minorée ?

Ex 7.

- 1) Soit (u_n) une suite de réels telle que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ . Démontrer que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- 2) Soit (u_n) une suite de réels telle que les sous-suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Démontrer que la suite (u_n) converge.

Ex 8. On considère une suite croissante (u_n) de réels.

- 1) On suppose que (u_n) possède une sous-suite convergente. Démontrer la convergence de la suite (u_n) .
- 2) On suppose que (u_n) possède une sous-suite divergente. Démontrer que la suite (u_n) possède une limite.

Convergence des suites

Ex 9. Les suites $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1) On suppose que la suite $(\sin(n))$ converge, et on note ℓ sa limite.
 - a) Calculer $\sin(n+1) - \sin(n-1)$. Qu'en déduire pour la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$?
 - b) Calculer $\cos(n+1) - \cos(n-1)$. Que vaut ℓ ?
 - c) Contredire alors une célèbre formule.
 - d) Justifier que la suite $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.
 - e) Comment procéder pour prouver que la suite $(\cos(n))$ diverge ?
- 2) Généraliser l'argument précédent pour montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, les suites $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

Ex 10. Soit (u_n) une suite de réels dont aucun n'est nul. On suppose que la suite $\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on

note $\ell \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.

- 1) On suppose $\ell < 1$ et on fixe arbitrairement $\tilde{\ell}$ tel que $\ell < \tilde{\ell} < 1$. Montrer alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq |u_{n_0}| \tilde{\ell}^{n-n_0}$ pour $n \geq n_0$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) On suppose $\ell > 1$ et on fixe arbitrairement $\tilde{\ell}$ tel que $\ell > \tilde{\ell} > 1$. Montrer alors qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \geq |u_{n_0}| \tilde{\ell}^{n-n_0}$ pour $n \geq n_0$. Qu'en déduire sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Préciser le résultat lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell > 1$.
- 3) a) Que se passe-t-il lorsque $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ tend vers $+\infty$?
b) Étudier les exemples $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = n$, $u_n = \ln n$, $u_n = (-1)^n$. Qu'en concluez-vous lorsque $\ell = 1$?
- 4) On se donne $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence des suites de terme général

$$u_n = \frac{\alpha^n}{n^3}, \quad v_n = \frac{\sqrt{n}}{\alpha^n}, \quad w_n = \frac{n^{10}}{n!}, \quad x_n = \frac{n!}{1.3.5 \cdots (2n+1)}, \quad y_n = \frac{n!}{n^n}.$$