

Feuille 1.**Nombres entiers et irrationnels**

Exercice 1. $\sqrt{2}$ est un irrationnel. On souhaite démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel, i.e. n'est pas une fraction $\frac{a}{b}$.

- 1) On raisonne par l'absurde.
 - a) Montrer qu'alors il existe a et b entiers ≥ 1 tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$.
 - b) Etablir que a est pair.
 - c) Démontrer que b est aussi pair. Conclure.
- 2) Utiliser un résultat du cours pour démontrer de façon similaire que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
- 3) On note $\mathcal{C} = \{m^2, m \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des carrés d'entiers.
 - a) Vérifier que si $n \in \mathcal{C}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
 - b) Soit $n \notin \mathcal{C}$. Généraliser le raisonnement de la question 1) pour montrer que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Des irrationnels ?

- 1) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est-il un rationnel ?
- 2) a) Etablir que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un irrationnel.
b) Même question pour $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.
- 3) Soit $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{27 + 6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27 - 6\sqrt{21}}$.
 - a) Exprimer α^3 en fonction de α .
 - b) Quelles sont les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 + 9x - 54$?
 - c) Que vaut α ? Honnêtement, l'auriez-vous parié ?

Exercice 3. Changer de base.

- 1) Ecrire 17 en base 2, puis en base 6.
- 2) a) Convertir en base 10 le nombre dont l'écriture en base 2 est 1100101.
b) Convertir en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est 4AB81.
- 3) Pour chacune des expressions ci-dessous, donner le résultat dans la base demandée :

base 6	$54001 + 32445;$	base 13	$A10B7 + 10C57;$
base 7	$514 \times 243;$	base 5	$2343 - 442.$

Exercice 4. Calculs de PGCD et de PPCM.

- 1) Trouver le PGCD et le PPCM des couples d'entiers suivants : $(2^2 \times 3^5 \times 13^4 \times 19, 2 \times 13^2 \times 17)$, $(2^2 \times 3^7 \times 543, 2 \times 13^2 \times 51)$, $(1064, 360)$ et $(1064, 361)$.
- 2) Appliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer les PGCD suivants :

$$21 \wedge 15; \quad 143 \wedge 22; \quad 567 \wedge 133; \quad 1856 \wedge 29; \quad 415 \wedge 93.$$

Exercice 5. Critères de divisibilité.

- 1) a) Démontrer qu'un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 9. On pourra écrire la division euclidienne de 10^k par 9. Est-ce que 153459 est divisible par 9 ?
b) Si $b \geq 2$ est un entier, justifier qu'un entier naturel est divisible par $b - 1$ si et seulement si la somme de ses chiffres (en base b) est divisible par $b - 1$.
- 2) a) Démontrer qu'un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 3.

- b) Est-ce que 509957923882 est divisible par 3 ?
- 3) Proposer et justifier un critère simple permettant de savoir si un entier est divisible par 3 lorsqu'il est exprimé en base 12.

Suites monotones

Exercice 6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- 1) Vérifier que la suite (H_n) est strictement croissante.
- 2) Montrer que la suite (H_n) tend vers $+\infty$ en minorant convenablement $H_{2n} - H_n$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $v_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

- 1) Vérifier que la suite (v_n) est strictement croissante.
- 2) Etablir que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ si $k \geq 2$, et en déduire que la suite (v_n) converge.

Exercice 8. Irrationalité du nombre e d'Euler (preuve de J. Fourier, 1815). On considère les suites (u_n) et (v_n) données par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!n},$$

- 1) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'encadrement $u_n < e < v_n$. En multipliant par un entier adapté, prouver que $e \notin \mathbb{Q}$.

$\rightsquigarrow$ Le nombre d'Euler e est tel que $e = \exp(1)$ ou encore $\ln(e) = 1$. C'est en 1737 qu'Euler montre l'irrationalité de e en utilisant la notion de fraction continue (voir Option Math 2).

Exercice 9. Racine carrée (méthode de Héron). On propose un algorithme (la méthode de Héron, encore appelée algorithme de Babylone) pour calculer une racine carrée de réel. On considère $a > 0$ et, partant d'un $x_0 > 0$ quelconque, la suite récurrente

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Vérifier que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et reste toujours > 0 .
- 2) a) Montrer que $x_n \geq \sqrt{a}$ quel que soit $n \geq 1$.
b) Justifier que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, puis que $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
c) Implémenter cet algorithme et observer la vitesse de convergence extrêmement rapide. Regarder ce qui se passe lorsque x_0 est très grand devant $\sqrt{a}$.

Exercice 10. Moyenne arithmético-géométrique. Pour deux réels a et b strictement positifs, on considère la suite récurrente $(a_n, b_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

- 1) a) Vérifier que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont bien définies et à valeurs strictement positives.
b) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq b_{n+1}$.
- 2) a) Prouver que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
b) Démontrer que (a_n) et (b_n) ont la même limite.
c) Ecrire un petit algorithme calculant $M(a, b)$ et observer la convergence extrêmement rapide.

Cette limite commune aux suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ est appelé *moyenne arithmético-géométrique* de a et b .